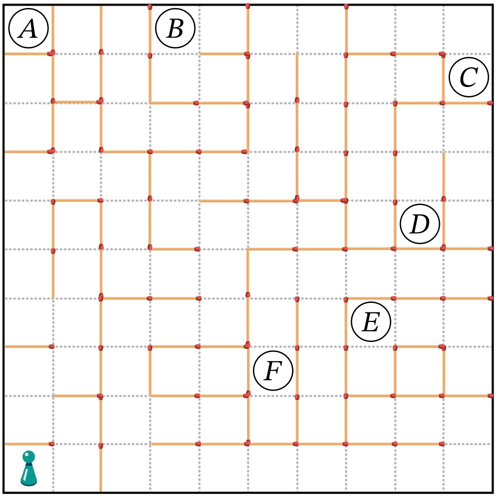
5 класс

Задача 5.1. На некоторые границы клеток доски 10×10 положили спички, а в одну из клеток — фишку, как показано на рисунке. За один ход фишку можно передвигать в соседнюю по стороне клетку, перепрыгивать через спичку запрещено.

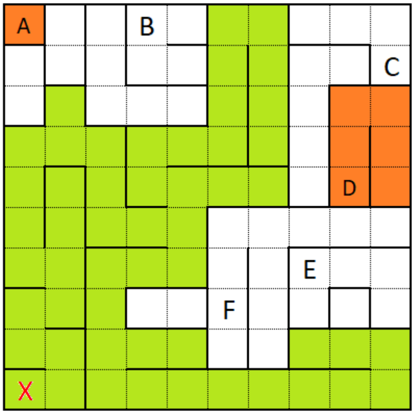
Клетка называется *достижимой*, если в неё можно попасть за несколько ходов из клетки X, убрав с доски не более одной спички.

Среди 6 клеток с кружочками выберите все, являющиеся достижимыми.



Ответ: B, C, E, F.

Решение. Закрасим зелёным цветом все клетки, куда можно добраться из клетки X, *не* убирая с доски спичек.



Теперь нетрудно понять, что клетки B, C, E, F являются достижимыми, а клетки A и D — нет (оранжевым покрашены те клетки, куда можно добраться либо из клетки A, либо из клетки D, не убирая с доски спичек). □

Задача 5.2. На уроке физкультуры в шеренгу встали 25 учеников 5«Б» класса. Каждый из ребят либо отличник, который всегда говорит правду, либо хулиган, который всегда врёт.

Отличник Влад встал на 13-е место. Все, кроме Влада, заявили: «Между мной и Владом ровно 6 хулиганов.» Сколько всего хулиганов в шеренге?

Ответ: 12.

Решение. Заметим, что ученики на местах 7—12 — хулиганы, так как между каждым из них и Владом меньше 6 человек. Значит, ученик с номером 6 — отличник. То же самое можно сказать про ученика на 5-м месте, затем про 4-е, про 3-е, про 2-е и про 1-е.

Получается, что первые шесть мест занимают отличники, следующие шесть мест занимают хулиганы, а уже на месте 13 стоит Влад. Аналогичное рассуждение можно провести для учеников на местах 14—25. Таким образом, в шеренге ровно $6 + 6 = 12$ хулиганов. □

Задача 5.3. Петя и Вася играли в солдатиков. Петя выстроил своих рыцарей «прямоугольником» — сколько-то колонн и сколько-то рядов. Когда все рыцари из первого и второго ряда ушли в разведку, то рыцарей осталось 24. Затем Васины лучники обратили в бегство всех рыцарей, которые остались в первой и второй колоннах. После этого осталось 18 рыцарей. Сколько рыцарей было у Пети изначально?

Ответ: 40.

Решение. Лучники обратили в бегство $24 - 18 = 6$ рыцарей. Это две колонны. Значит, на тот момент в каждой колонне было по 3 рыцаря. То есть 24 рыцаря стояли в 8 колоннах, по 3 рыцаря в каждой. Получается, что в разведку ушли два ряда, по 8 рыцарей в каждом, то есть всего 16 рыцарей (рис. 1).

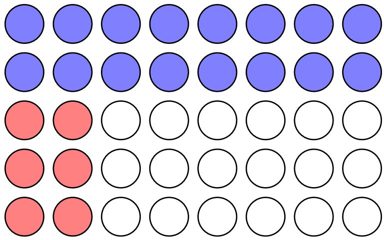


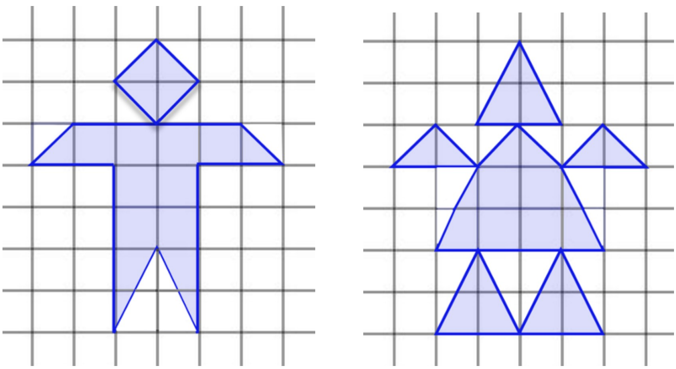
Рис. 1: К решению задачи 5.3. Синим отмечены ушедшие в разведку, а красным — обращенные в бегство.

Итого у Пети изначально было $24 + 16 = 40$ рыцарей. □

Задача 5.4. Маша нарисовала в тетради двух человечков. Площадь каждой клеточки равна 1.

Площадь какого из человечков больше?

Чему равна разница? Если площади одинаковы, в ответ запишите «0».

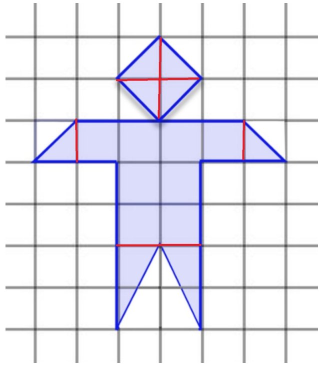


Ответ: площадь правого человечка на 2 больше, чем площадь левого.

Решение. Посчитаем площади человечков.

Как видно на рисунке справа, первый человечек состоит из

- 8 целых клеточек,
- 6 маленьких треугольников (каждый из которых равен половине клеточки),
- 2 больших треугольников (каждый из которых равен половине прямоугольника 1×2).



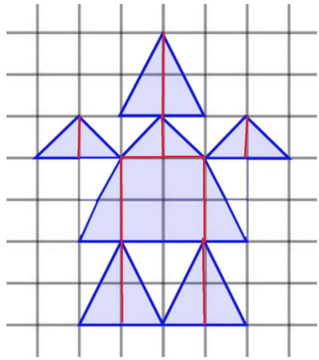
Каждые два маленьких треугольника «дают в сумме одну целую клеточку», поэтому их суммарная площадь равна 1. Каждые два больших треугольника «дают в сумме один прямоугольник 1×2», поэтому их суммарная площадь равна 2.

Тогда площадь первого человечка равна

$$8 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 13.$$

Как видно на рисунке справа, второй человечек состоит из

- 4 целых клеточек,
- 6 маленьких треугольников (каждый из которых равен половине клеточки),
- 8 больших треугольников (каждый из которых равен половине прямоугольника 1×2).



Тогда площадь второго человечка равна

$$4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 15.$$

Итак, площадь второго (правого) человечка на 2 больше, чем площадь первого (левого). □

Задача 5.5. У Дениса есть одинаковые десятирублёвые монеты, одинаковые двухрублёвые и одинаковые однорублёвые монеты (монет каждого вида больше 20). Сколькими способами Денис сможет заплатить без сдачи за пирожок стоимостью 16 рублей? Не обязательно использовать монеты каждого вида.

Ответ: 13.

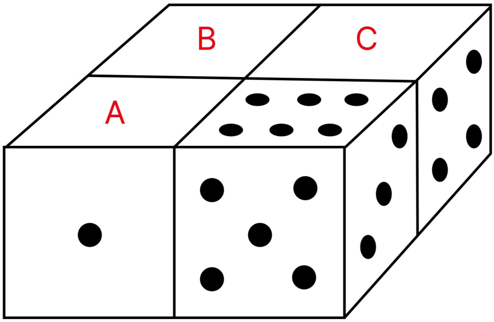
Решение. Если Денис будет использовать десятирублёвую монету, то ему останется набрать 6 рублей двухрублёвыми и однорублёвыми монетами. Есть 4 способа это сделать: использовав от 0 до 3 двухрублёвых монет.

Если Денис не будет использовать десятирублёвую монету, то ему потребуется набрать 16 рублей двухрублёвыми и однорублёвыми монетами. Есть 9 способов это сделать, использовав от 0 до 8 двухрублёвых монет.

Итого способов $4 + 9 = 13$. □

Задача 5.6. Есть 4 абсолютно одинаковых кубика, у каждого из которых на одной грани отмечены 6 точек, на другой — 5, ..., на оставшейся — 1. Известно, что на любых двух противоположных гранях кубика суммарно 7 точек.

Из этих 4 кубиков склеили фигуру, изображённую на рисунке. Известно, что на каждой паре склеенных граней отмечено одинаковое количество точек. Сколько точек на гранях A, B, C?



Ответ: $A = 2, B = 2, C = 6$.

Решение. Сначала воспользуемся условием о том, что сумма количеств точек на паре противоположных граней кубика равна 7, чтобы понять, как выглядит кубик, три грани которого нам известны. Его скрытые грани изображены на рис. 2 (с точностью до расположения точек на грани с 2 точками, которое из условия однозначно определить нельзя — но в решении данной задачи оно роли и не играет).

Мы знаем, что остальные кубики точно такие же. У каждого из кубиков с гранями A и C одну грань мы видим, а ещё одну грань знаем, так как она склеена с известной гранью первого кубика. По расположению двух соседних граней можно однозначно установить ориентацию кубика в пространстве. После этого станут известны две грани кубика B, которыми он склеен с кубиками A и C, и мы аналогично установим его ориентацию. Кубики в раздвинутом виде изображены на рис. 3 (опять-таки с точностью до расположения точек на гранях с двумя точками). □

Задача 5.7. В классе 31 ученик. У трёх из них ровно по три друга, у следующих трёх — по шесть, у следующих трёх — по девять, ..., у следующих трёх — по тридцать. Сколько друзей у 31-го ученика? (Дружба между людьми взаимна.)

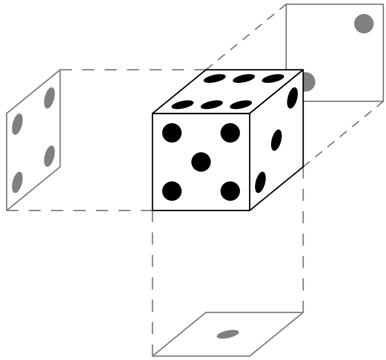


Рис. 2: к решению задачи 5.6

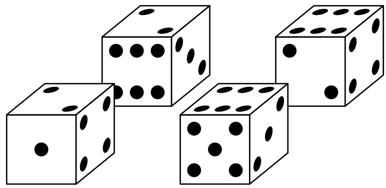


Рис. 3: к решению задачи 5.6

Ответ: 15.

Решение. Пусть у 31-го ученика x друзей.

Рассмотрим трёх людей, каждый из которых имеет по 30 друзей в классе. Всего в классе 31 ученик, поэтому они дружат со всеми одноклассниками.

Давайте выгоним их из класса. Тогда у каждого человека количество друзей уменьшится на 3:

- у первой тройки станет по 0 друзей;
- у второй тройки станет по 3 друга;
- ...
- у девятой тройки станет по 24 друга;
- у последнего ученика станет $x-3$ друга.

Троих учеников, у которых нет друзей, тоже выгоним из класса. Тогда конфигурация примет следующий вид.

В классе 25 учеников. У трёх из них ровно по три друга, у следующих трёх — по шесть, у следующих трёх — по девять, ..., у следующих трёх — по 24. У последнего ученика $x-3$

друга.

Повторим аналогичное действие ещё 4 раза. Тогда в классе останется только последний ученик, и у него будет $x - 15$ друзей. Так как в этот момент в классе больше не осталось людей, то $x = 15$. $\square$

Задача 5.8. В многодетной семье Ивановых нет близнецов. Репортёр приехал к Ивановым, чтобы взять у них интервью.

Во время интервью каждый из детей сказал: «У меня есть старший брат». Немного подумав, репортёр очень удивился. Но отец семейства объяснил, что некоторые дети пошутили, и лишь шестеро сказали правду. Сколько детей может быть в этой семье, если известно, что мальчиков у Ивановых на 4 больше, чем девочек? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 8, 10.

Решение. Пусть в семье Ивановых x мальчиков. Тогда самый старший мальчик пошутил, а все остальные $x - 1$ мальчиков сказали правду.

Если $x \geqslant 8$, то правду сказали хотя бы 7 детей, что противоречит условию задачи.

Если $x \leqslant 5$, то девочек в семье не более 1. Но тогда правду могли сказать не более $4 + 1$ детей, что противоречит условию задачи.

Если $x = 6$, то девочек в семье 2. Такая ситуация возможна, если самый старший и самый младший ребёнок в семье — девочки. Детей в семье $6 + 2 = 8$.

Если $x = 7$, то девочек в семье 3. Такая ситуация возможна, если трое самых старших детей в семье — девочки. Детей в семье $7 + 3 = 10$. $\square$