

Всероссийская олимпиада школьников по математике  
школьный этап 2022-2023  
группа 1  
Задания и решения

18 октября 2022 г.

**6 класс**

**1. Вариант 1.**

Маша раскладывает теннисные мячики в одинаковые коробки. Если она использует 4 коробки, то в последней остается место еще для 8 мячиков, а если использует 3 коробки, то 4 мячика в коробки не поместятся. На сколько мячиков рассчитана одна коробка?

**Ответ.** 12

Решение.

Способ 1.

Заметим, что если мячики лежат в 3 коробках, то остаётся 4 теннисных мячика. Возьмём эти 4 мячика и положим в четвёртую коробку. По условию там ещё останется место для 8 мячиков. Значит, всего в коробку помещается 12 мячиков.

Способ 2.

Пусть коробка вмещает  $x$  мячиков. Тогда  $3x + 4 = 4x - 8$ . Отсюда  $x = 12$ .

Вариант 2.

Маша раскладывает теннисные мячики в одинаковые коробки. Если она использует 4 коробки, то в последней остается место еще для 9 мячиков, а если использует 3 коробки, то 5 мячиков, в коробки не поместятся. На сколько мячиков рассчитана одна коробка?

**Ответ.** 14

Вариант 3.

Маша раскладывает теннисные мячики в одинаковые коробки. Если она использует 4 коробки, то в последней остается место еще для 10 мячиков, а если использует 3 коробки, то 6 мячиков в коробки не поместятся. На сколько мячиков рассчитана одна коробка?

**Ответ.** 16

Вариант 4.

Маша раскладывает теннисные мячики в одинаковые коробки. Если она использует 4 коробки, то в последней остается место еще для 11 мячиков, а если использует 3 коробки, то 7 мячиков в коробки не поместятся. На сколько мячиков рассчитана одна коробка?

**Ответ.** 18

**2. Вариант 1.**

Вася построил пирамиду из шаров следующим образом: на вершине пирамиды лежит 1 шар, во-втором слое сверху – 4 шара, и т.д. Шары лежат по границе и внутри пирамиды (см. рисунок) Найдите общее количество шаров лежащих в третьем и пятом сверху слоях?



**Ответ.** 34

Решение. Каждый слой пирамиды представляет собой квадрат, выложенный из шаров. У первого слоя сторона квадрата равна одному шару, у второго – двум,... у  $n$ -го слоя сторона состоит из  $n$  шаров. Тогда он состоит из  $n^2$  шаров. Получаем, что в третьем слое 9, а в пятом – 25 шаров.

**Вариант 2.**

Вася построил пирамиду из шаров следующим образом: на вершине пирамиды лежит 1 шар, во-втором слое сверху – 4 шара, и т.д. Шары лежат по границе и внутри пирамиды (см. рисунок) Найдите общее количество шаров лежащих в третьем и шестом сверху слоях?



**Ответ.** 45

**Вариант 3.**

Вася построил пирамиду из шаров следующим образом: на вершине пирамиды лежит 1 шар, во-втором слое сверху – 4 шара, и т.д. Шары лежат по границе и внутри пирамиды (см. рисунок) Найдите общее количество шаров лежащих в четвертом и пятом сверху слоях?



**Ответ.** 41

Вариант 4.

Вася построил пирамиду из шаров следующим образом: на вершине пирамиды лежит 1 шар, во-втором слое сверху – 4 шара, и т.д. Шары лежат по границе и внутри пирамиды (см. рисунок) Найдите общее количество шаров лежащих в четвертом и шестом сверху слоях?



**Ответ.** 52

3. Вариант 1.

На доске написано натуральное число. Пять школьников сказали о нём следующее:

- Петя: «Это число больше 10».
- Коля: «Это число не меньше 11».
- Вася: «Это число больше 12».
- Дима: «Это число меньше 12».
- Олег: «Это число не больше 12».

Найдите наибольшее возможное число правильных утверждений.

**Ответ.** 4

Решение. Все пять ответов не могли оказаться верными, т.к. ответы Васи и Димы противоречат друг другу. Четыре ответа могли оказаться верными, если на доске записано число 11.

Вариант 2.

На доске написано натуральное число. Пять школьников сказали о нём следующее:

- Петя: «Это число больше 10».
- Коля: «Это число не меньше 11».
- Вася: «Это число больше 12».
- Дима: «Это число меньше 12».
- Олег: «Это число не больше 12».

Найдите наибольшее возможное число **неправильных** утверждений.

**Ответ.** 1

Вариант 3.

На доске написано натуральное число. Пять школьников сказали о нём следующее:

- Петя: «Это число больше 11».
- Коля: «Это число не меньше 12».
- Вася: «Это число больше 13».
- Дима: «Это число меньше 13».
- Олег: «Это число не больше 13».

Найдите наибольшее возможное число правильных утверждений.

**Ответ.** 4

Вариант 4.

На доске написано натуральное число. Пять школьников сказали о нём следующее:

- Петя: «Это число больше 11».
- Коля: «Это число не меньше 12».
- Вася: «Это число больше 13».
- Дима: «Это число меньше 13».
- Олег: «Это число не больше 13».

Найдите наибольшее возможное число **неправильных** утверждений.

**Ответ.** 1

#### 4. Вариант 1.

В числе две цифры поменяли местами, и от этого оно увеличилось больше чем в 3 раза. Получилось 8453719. Найдите исходное число.

**Ответ.** 1453789.

Решение. При уменьшении числа 8453719 обратно хотя бы в 3 раза, получится число меньше 3000000. Поэтому 8 поменяли с какой-то цифрой меньше 3, такая цифра только одна и это 1.

Вариант 2.

В числе две цифры поменяли местами, и от этого оно увеличилось больше чем в 3 раза. Получилось 8453729. Найдите исходное число.

**Ответ.** 2453789.

Вариант 3.

В числе две цифры поменяли местами, и от этого оно увеличилось больше чем в 3 раза. Получилось 8454917. Найдите исходное число.

**Ответ.** 1454987.

Вариант 4.

В числе две цифры поменяли местами, и от этого оно увеличилось больше чем в 3 раза. Получилось 8445329. Найдите исходное число.

**Ответ.** 2445389.

**5. Вариант 1.**

Кафе «Буратино» работает 6 дней в неделю с выходным по понедельникам. Коля произнес два утверждения: «с 1 по 20 апреля кафе работало 18 дней» и «с 10 по 30 апреля кафе работало тоже 18 дней». Известно, что один раз он ошибся. Сколько дней кафе работало с 1 по 27 апреля?

**Ответ.** 23

Решение. В промежутке с 10 по 30 апреля ровно 21 день. Разбив этот промежуток на три семидневки: с 10-ого по 16-ое, с 17-ого по 23-е, с 24-ого по 30-е, получим ровно один выходной (понедельник) в каждой из трёх семидневок. Следовательно, во втором утверждении Коля сказал правду, тогда в первом – ошибся.

Промежуток с 1-ого по 20-ое разбивается на две семидневки: с 1-ого по 7-ое, с 8-ого по 14-ое, и шестидневку (с 15-ого по 20-е). В двух семидневках – 12 рабочих дней, тогда в промежутке с 15-ого по 20-ое могло быть либо шесть рабочих дней, либо пять. Но поскольку Коля здесь ошибся, их было пять. То есть в промежутке 15-20 апреля обязательно был выходной, как и в промежутке 22-27 апреля (ибо он получается сдвигом предыдущего ровно на 7 дней).

Итого, с 1 по 21 апреля кафе работало  $3 \cdot 6 = 18$  дней, и в промежутке с 22 по 27 апреля ещё  $6 - 1 = 5$  дней, то есть всего  $18 + 5 = 23$  дня.

Вариант 2.

Кафе «Буратино» работает 6 дней в неделю с выходным по понедельникам. Коля произнес два утверждения: «с 1 по 20 апреля кафе работало 18 дней» и «с 10 по 30 апреля кафе работало тоже 18 дней». Известно, что один раз он ошибся. Сколько дней кафе работало с 1 по 13 апреля?

**Ответ.** 11

Вариант 3.

Кафе «Буратино» работает 6 дней в неделю с выходным по понедельникам. Коля произнес два утверждения: «с 1 по 20 апреля кафе работало 18 дней» и «с 10 по 30 апреля кафе работало тоже 18 дней». Известно, что один раз он ошибся. Сколько дней кафе работало с 8 по 20 апреля?

**Ответ.** 11

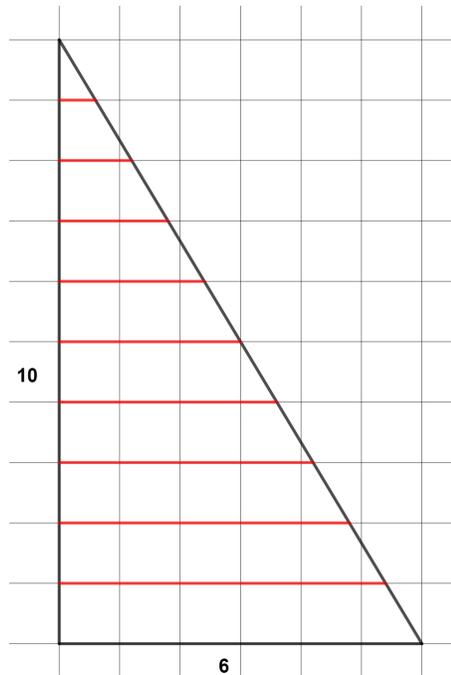
Вариант 4.

Кафе «Буратино» работает 6 дней в неделю с выходным по понедельникам. Коля произнес два утверждения: «с 1 по 20 апреля кафе работало 18 дней» и «с 10 по 30 апреля кафе работало тоже 18 дней». Известно, что один раз он ошибся. Сколько дней кафе работало с 8 по 27 апреля?

**Ответ.** 17

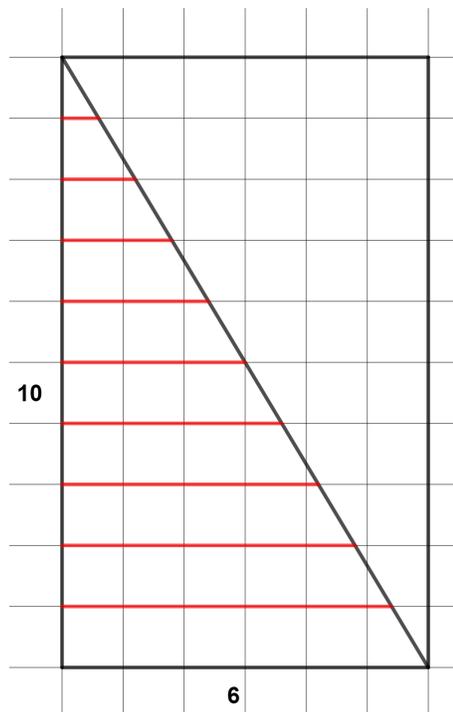
6. Вариант 1.

На клетчатой бумаге изображен прямоугольный треугольник со сторонами 6 и 10 (см. рисунок). Найдите суммарную длину горизонтальных линий сетки внутри этого треугольника.



**Ответ.** 27.

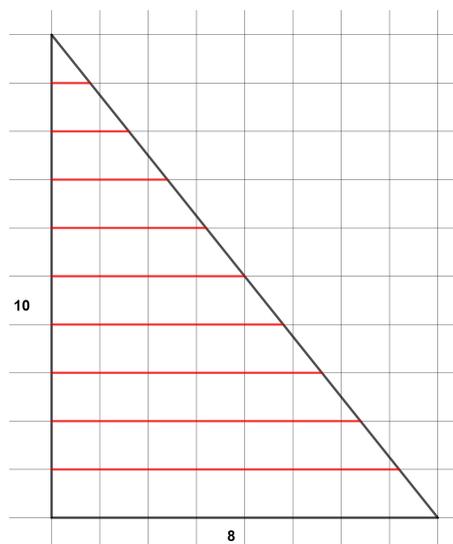
Решение. Дорисуем треугольник до прямоугольника.



Он разбивается на два одинаковых треугольника, поэтому суммарная длина горизонтальных линий в прямоугольнике вдвое больше искомой суммарной длины. В прямоугольнике заключено 9 линий, каждая из которых имеет длину 6. Искомая суммарная длина равна  $\frac{9 \cdot 6}{2} = 27$ .

Вариант 2.

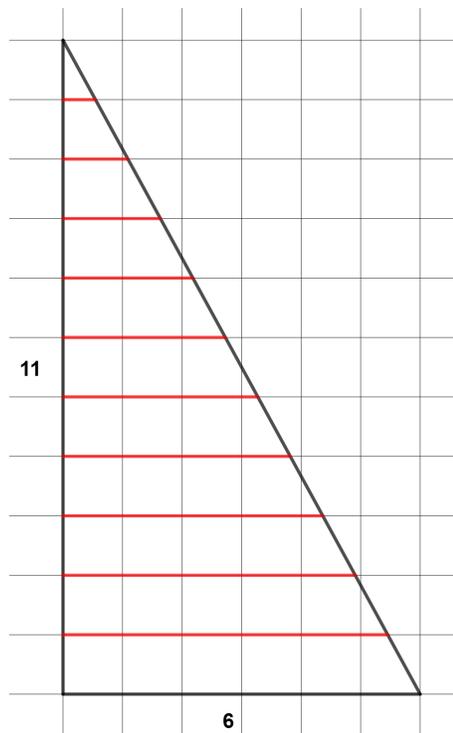
На клетчатой бумаге изображен прямоугольный треугольник со сторонами 8 и 10 (см. рисунок). Найдите суммарную длину горизонтальных линий сетки внутри этого треугольника.



**Ответ.** 36.

Вариант 3.

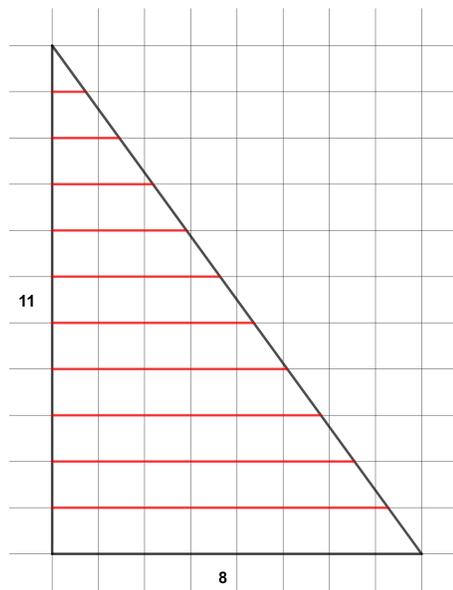
На клетчатой бумаге изображен прямоугольный треугольник со сторонами 6 и 11 (см. рисунок). Найдите суммарную длину горизонтальных линий сетки внутри этого треугольника.



**Ответ.** 30.

Вариант 4.

На клетчатой бумаге изображен прямоугольный треугольник со сторонами 8 и 11 (см. рисунок). Найдите суммарную длину горизонтальных линий сетки внутри этого треугольника.



**Ответ.** 40.

7. Вариант 1.

Петя записал на доске 9 последовательных натуральных чисел. Коля вычислил их сумму и получил ответ 43040102. Оказалось, что он ошибся только в первой цифре суммы. Какой должна быть

первая цифра?

**Ответ. 8.**

Решение. Обозначим последовательные натуральные числа  $a - 4, a - 3, \dots, a + 3, a + 4$ . Сумма девяти последовательных чисел делится на 9, действительно, эта сумма равна  $(a - 4) + (a - 3) + \dots + (a + 3) + (a + 4) = 9a$ . То есть искомая сумма должна делиться на 9. Значит, и сумма цифр полученного ответа должна делиться на 9. Сумма всех цифр, кроме первой, равна 10. Тогда на первом месте должна стоять цифра 8. Подходящим числом будет 83040102.

Вариант 2.

Петя записал на доске 9 последовательных натуральных чисел. Коля вычислил их сумму и получил ответ 44040102. Оказалось, что он ошибся только в первой цифре суммы. Какой должна быть первая цифра?

**Ответ. 7.**

Вариант 3.

Петя записал на доске 9 последовательных натуральных чисел. Коля вычислил их сумму и получил ответ 45040102. Оказалось, что он ошибся только в первой цифре суммы. Какой должна быть первая цифра?

**Ответ. 6.**

Вариант 4.

Петя записал на доске 9 последовательных натуральных чисел. Коля вычислил их сумму и получил ответ 46040102. Оказалось, что он ошибся только в первой цифре суммы. Какой должна быть первая цифра?

**Ответ. 5.**

8. Вариант 1.

По кругу выписано 101 натуральное число. Известно, что среди любых 5 подряд идущих чисел найдутся хотя бы два чётных числа. Какое наименьшее количество чётных чисел может быть среди выписанных?

**Ответ. 41.**

Решение. Рассмотрим любые 5 подряд идущих числа. Среди них есть чётное. Зафиксируем его, а остальные 100 разобьем на 20 пятёрок подряд идущих. В каждой такой пятёрке будет не менее двух чётных чисел. Таким образом, общее количество чётных чисел не менее  $1 + 2 \cdot 20 = 41$ . Такая ситуация возможна. Пронумеруем числа по кругу. И чётными можно взять числа с номерами 1, 3, 6, 8, 11, ..., 98, 101 (чётным является число под номером 1 и в каждой пятерке чисел с номерами  $5k+2, 5k+3, 5k+4, 5k+5, 5k+6$  чётными являются числа под номерами  $5k+3$  и  $5k+6$ ).

Вариант 2.

По кругу выписано 151 натуральное число. Известно, что среди любых 5 подряд идущих чисел найдутся хотя бы два чётных числа. Какое наименьшее количество чётных чисел может быть среди выписанных?

**Ответ. 61.**

Вариант 3.

По кругу выписано 201 натуральное число. Известно, что среди любых 5 подряд идущих чисел найдутся хотя бы два чётных числа. Какое наименьшее количество чётных чисел может быть среди выписанных?

**Ответ.** 81.

Вариант 4.

По кругу выписано 251 натуральное число. Известно, что среди любых 5 подряд идущих чисел найдутся хотя бы два чётных числа. Какое наименьшее количество чётных чисел может быть среди выписанных?

**Ответ.** 101.