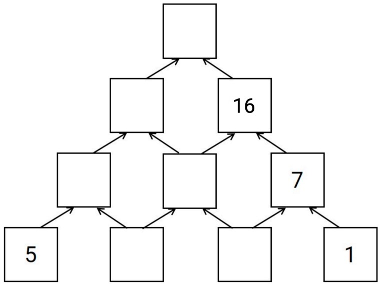
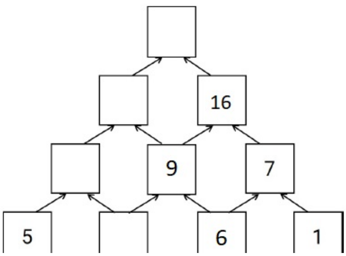
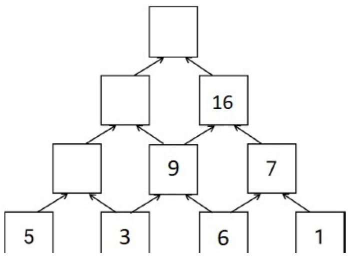
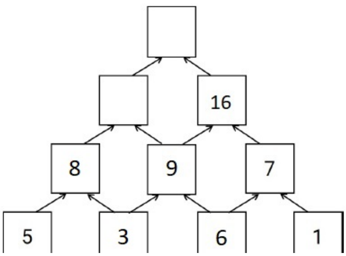
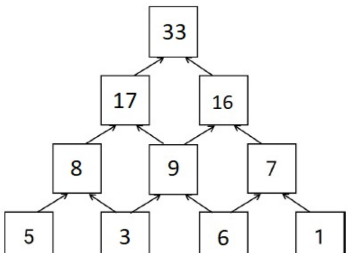
6 класс

Задача 6.1. Клеточки пирамиды заполнили по следующему правилу: над каждыми двумя соседними числами записали их сумму. Некоторые числа стёрли, и получилась конструкция, изображённая на рисунке. Какое число было в самой верхней клеточке?



Ответ: 33.

Решение. Покажем, как можно последовательно восстановить расстановку всех чисел.

□

Задача 6.2. Петя и Вася решили получить как можно больше пятёрок за 1 и 2 сентября.

- 1 сентября они суммарно получили 10 пятёрок, причём Петя получил пятёрок больше, чем Вася;
- 2 сентября Вася получил 3 пятёрки, а Петя не получил ни одной;
- по итогам этих двух дней Вася получил больше пятёрок, чем Петя.

Кто сколько пятёрок получил за эти два дня?

Ответ: Петя получил 6 пятёрок, а Вася — 7.

Решение. Первого сентября Петя получил больше пятёрок, чем Вася, поэтому Петя получил хотя бы 6 пятёрок, а Вася получил не более 4 пятёрок.

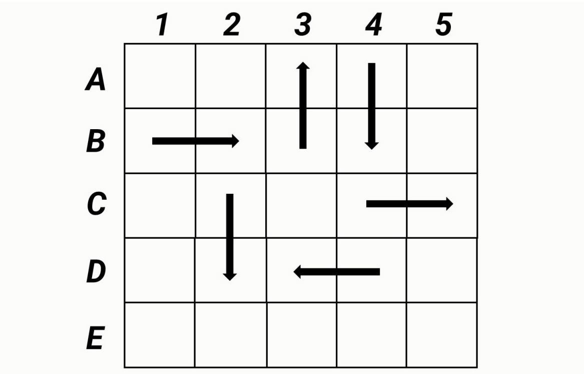
Если к ним прибавить пятёрки второго дня, то получим, что Петя получил хотя бы 6 пятёрок, а Вася получил не более 7 пятёрок.

Так как Вася получил за два дня больше пятёрок, то он получил ровно 7 пятёрок, а Петя — ровно 6 пятёрок.

Задача 6.3. Фишку поставили на некоторую клетку доски 5×5. Передвигая фишку на соседнюю по стороне клетку, обошли всю доску за исключением одной клетки и вернулись на стартовую позицию. В каждой клетке, кроме начальной, фишка побывала не более одного раза.

На рисунке изображены стрелочки, показывающие, куда передвигали фишку из некоторых клеток.

Выберите на картинке клетку, в которую фишка *не* заходила.



Ответ: $C1$.

Решение. Раз фишка вернулась в исходную клетку, будем считать её путь циклическим. Заметим, что никакая часть пути фишки не может рассекать доску на две области, в каждой из которых более 1 клетки, так как после прохождения этой части пути фишка должна перейти в одну из областей — а во вторую зайти уже не сможет, что противоречит условию.

Сначала установим, куда фишка могла пойти из клетки $B2$:

- в клетку $A2$ она перейти не могла, так как оттуда нельзя пройти ни в $A1$ (путь $B1 \to B2 \to A2 \to A1$ не продолжается), ни в $A3$ (туда уже ведёт стрелка из другой клетки);
- в клетку $B3$ она перейти не могла, так как путь $B1 \to B2 \to B3 \to A3$ рассекает доску на две области из более чем одной клетки.

Следовательно, из $B2$ фишка перешла в $C2$, а далее, согласно стрелке, в $D2$.

Куда фишка могла пойти из клетки $D2$?

- в $D3$ она перейти не могла, так как туда уже ведёт стрелка;
- в $E2$ она перейти не могла, так как путь $B1 \to B2 \to C2 \to D2 \to E2$ рассекает доску на две области из более чем одной клетки.

Следовательно, из $D2$ фишка перешла в $D1$. Ясно, что клетка $C1$ в таком случае должна остаться непосещённой, так как она отсечена частью пути $B1 \to B2 \to C2 \to D2 \to D1$.

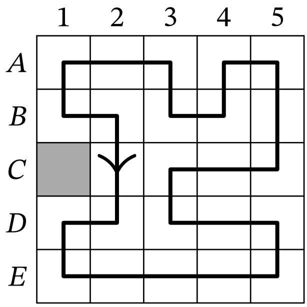


Рис. 4: к решению задачи 6.3

Путь, удовлетворяющий условию и проходящий по всем остальным клеткам, приведен на рис. 4. Он строится единственным образом. □

Задача 6.4. На клавиатуре компьютера не работает клавиша с цифрой 1. Например, если попытаться напечатать число 1231234, то пропечатается только число 23234.

Саша попытался напечатать 8-значное число, но пропечаталось только 202020. Сколько существует 8-значных чисел, подходящих под это условие?

Ответ: 28.

Решение. Ясно, что не пропечаталось 2 единицы. Есть 7 позиций, где они могут располагаться (они могут быть как в одной позиции, так и в разных):

- **X** 202020;
- 2 **X** 02020;
- 20 **X** 2020;
- 202 **X** 020;
- 2020 **X** 20;
- 20202 **X** 0;
- 202020 **X**.

Случай 1. Если первую единицу поставить на первую позицию, то для второй единицы останется 7 вариантов размещения (в любую из вышеперечисленных позиций).

Случай 2. Если первую единицу поставить на вторую позицию, то для второй единицы останется 6 вариантов размещения (в любую из вышеперечисленных позиций, кроме первой, так как этот вариант мы уже посчитали ранее).

Случай 3. Если первую единицу поставить на третью позицию, то для второй единицы останется 5 вариантов размещения (в любую из вышеперечисленных позиций, кроме первой и второй, так как эти варианты мы уже посчитали ранее).

…

Случай 7. Если первую единицу поставить на седьмую позицию, то для второй единицы останется 1 вариант размещения (только на седьмую позицию; все остальные варианты были посчитаны ранее).

Итого вариантов ровно $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$. □

Задача 6.5. На прямой отмечены 5 точек P, Q, R, S, T, именно в таком порядке. Известно, что сумма расстояний от P до остальных 4 точек равна 67, а сумма расстояний от Q до остальных 4 точек равна 34. Найдите длину отрезка PQ.

Ответ: 11.

Решение. Из условия задачи известно, что

$$PQ + PR + PS + PT = 67 \quad \text{и} \quad QP + QR + QS + QT = 34.$$

Найдём разность этих величин:

$$\begin{aligned}33 = 67 - 34 &= (PQ + PR + PS + PT) - (QP + QR + QS + QT) = \\ &= (PQ - QP) + (PR - QR) + (PS - QS) + (PT - QT) = 0 + PQ + PQ + PQ = 3 \cdot PQ,\end{aligned}$$

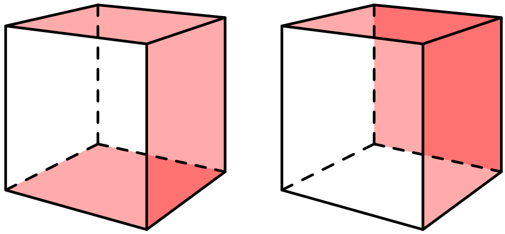
откуда $PQ = 11$. □

Задача 6.6. Женя покрасил три грани белого кубика $6 \times 6 \times 6$ в красный цвет. Затем он распилил его на 216 одинаковых маленьких кубиков $1 \times 1 \times 1$. Сколько у него могло получиться маленьких кубиков без красных граней? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 120, 125.

Решение. Есть принципиально два случая раскраски граней большого кубика:

- три раскрашенные грани образуют «букву П»;
- три раскрашенные грани имеют общую вершину.



В первом случае, если «срезать» раскрашенные кубики $1\times1\times1$, останется параллелепипед $4\times5\times6$. Тогда маленьких кубиков без красных граней будет $4\cdot5\cdot6 = 120$.

Во втором случае, если «срезать» раскрашенные кубики $1\times1\times1$, останется кубик $5\times5\times5$. Тогда маленьких кубиков без красных граней будет $5\cdot5\cdot5 = 125$. □

Задача 6.7. Амурский и бенгальский тигры начали бегать по кругу в 12:00, каждый со своей постоянной скоростью. К 14:00 амурский тигр пробежал на 6 кругов больше бенгальского. Затем амурский тигр увеличил свою скорость на 10 км/ч, и к 15:00 он суммарно пробежал уже на 17 кругов больше бенгальского. Сколько метров составляет длина круга?

Ответ: 1250.

Решение. За первые 2 часа амурский тигр пробежал больше на 6 кругов, т.е. за 1 час он пробегал больше на 3 круга. Если бы он свою скорость не увеличивал, за первые 3 часа он пробежал бы на 9 кругов больше. Но прибавка скорости повлияла на то, что за третий час он пробежал дополнительные $17-9 = 8$ кругов. Поскольку он увеличил свою скорость на 10 км/ч, то добавленное расстояние составит 10 км/ч $\cdot$ 1 ч $=$ 10 км, а длина одного круга тогда $\frac{10}{8}$ км, или 1250 метров. □

Задача 6.8. В 6 «А» классе учатся несколько мальчиков и девочек. Известно, что в 6 «А»

- девочка Таня дружит с 12 мальчиками;
- девочка Даша дружит с 12 мальчиками;
- девочка Катя дружит с 13 мальчиками;
- у любой девочки найдётся друг среди любых трёх мальчиков.

Сколько мальчиков может быть в 6 «А» классе? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 13, 14.

Решение. Из условия следует, что мальчиков в классе хотя бы 13. Если бы их было хотя бы 15, то среди них можно было бы выбрать троих, которые не дружат с Таней. Но тогда у Тани среди них не нашлось бы друга, противоречие. Значит, всего мальчиков 13 или 14. Приведём соответствующие примеры.

1) Пусть в классе всего 3 девочки (Таня, Даша, Катя) и 13 мальчиков. Среди них есть мальчик Андрей, который не дружит только с Таней, а также мальчик Боря, который не дружит только с Дашей (все остальные пары людей в классе дружат). Легко видеть, что все условия задачи выполняются.

2) Пусть в классе всего 3 девочки (Таня, Даша, Катя) и 14 мальчиков. Среди них есть мальчики Влад и Денис, которые не дружат только с Таней, мальчики Женя и Кирилл, которые не дружат только с Дашей, а также мальчик Лёня, который не дружит только с Катей (все остальные пары людей в классе дружат). Легко видеть, что все условия задачи выполняются. □