

Школьный этап ВСОШ по математике, 2022-2023 учебный год, 6 класс.

1.1. Миша и Гриша пишут на доске числа. Миша пишет тройки, а Гриша пятёрки. Всего они записали 20 чисел. Сколько было записано пятёрок, если сумма всех чисел равна 94?

Ответ: 17

Решение. Если бы все 20 чисел были «5», то их сумма равнялась бы 100. Будем делать замены «5» на «3». С каждой заменой сумма уменьшается на 2. Так как $100 - 94 = 6$, $6 : 2 = 3$, то замен нужно 3. Значит, пятёрок $20 - 3 = 17$.

2.1. У продавца есть гирьки весом 1, 2, 4, 8, 16, 32 грамма (каждой по одной) и чашечные весы. На первую чашу положили конфету весом 25 граммов и какие-то три гирьки, на вторую — три оставшиеся гирьки, причём весы пришли в равновесие. Укажите веса всех трёх гирек, лежащих на второй чаше.

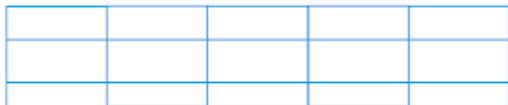
Ответ: 4, 8, 32 (Все ответы)

Решение.

1 способ. Найдем сумму всех гирек и конфеты, чтобы понять, сколько нам придётся уравновесить граммов. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 25 = 88$. $88 : 2 = 44$ - на каждой чаше. 44 можно получить единственным образом $32 + 8 + 4$, что и будет ответом.

2 способ. Заметим, что в любом наборе гирь самая тяжелая весит больше суммы остальных. Поэтому гиря в 32 г должна точно находиться на второй чаше. Так как $25 < 32$, гиря в 16 г должна точно находиться на первой чаше. Так как $25 + 16 > 32$, гиря в 8 г должна точно находиться на второй чаше. Аналогично продолжая далее, получаем, что гиря 4 г должна лежать также на второй чаше (ее вес сейчас меньше, $25 + 16 > 32 + 8$), а оставшиеся гири 1, 2 кладутся на первую, уравновешивая чаши.

3.1. Пять одинаковых квадратов, стоящих в ряд, разрезали двумя горизонтальными прямыми. Сумма периметров получившихся 15 прямоугольников равна 800 см. Укажите в сантиметрах длину исходных квадратов.



Ответ: 20

Решение. Подсчитаем, сколько раз в сумме всех периметров повторяется сторона исходного квадрата. Стороны прямоугольника считаются по одному разу (итого 12), перемычки — по два раза ($4 \cdot 2 + 10 \cdot 2 = 28$). Итого 40. $800 : 40 = 20$ см — сторона квадрата.

4.1. В ряд выстроились 64 человека — каждый или рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда говорит неправду. Один из стоящих рыцарей сказал, что стоит рядом с рыцарем и лжецом, и все остальные 63 человека повторили его фразу. Укажите, сколько среди них было рыцарей.

Ответ: 42

Решение. Крайние — обязательно лжецы, так как у них нет второго соседа, и, сказав данную фразу, стоящие там солгали. Все остальные могут быть лжецами, тогда рыцарей нет вовсе, но этот вариант противоречит условию, так как хотя бы один рыцарь присутствует. Если имеется рыцарь, то рядом с ним стоят рыцарь и лжец: РРЛ или ЛРР. Лжец не может сказать правду, поэтому, если с одной стороны от него рыцарь, то и с другой стороны должен стоять рыцарь (если лжец не с краю). Получаем ...РРЛР... или ...ЛРРР... Рыцарь не может стоять между двух лжецов, поэтому рыцари всегда стоят парами. Имеем ...РРЛРР... в обоих случаях. Таким образом, имеется следующее расположение ЛРРЛРРЛРР...ЛРРЛ - если не считать последнего лжеца, то оставшиеся 63 человека разбиваются на 21 тройку ЛРР, в которой 42 рыцаря.

5.1. В ряд стоят 27 спичечных коробков, в каждом лежит некоторое количество спичек. Известно, что в любых четырёх подряд стоящих коробках в сумме 25 спичек, а во всех — в сумме 165. Сколько спичек в восьмом по счёту коробке?

Ответ: 10

Решение. В первых 24 коробках в сумме $6 \cdot 25 = 150$ спичек. В последних трёх — 15. Значит, в 4м с конца (или в 24м с начала) - 10 спичек. Тогда в 24,23,22,21 в сумме 25 спичек, значит, в 21,22,23 в сумме 15. Но в 23,22,21 и 20 в сумме также 25, значит, в 20м - 10, столько же, сколько и в 24. Таким образом, в каждой 4й коробке с номером, кратным 4м, будет 10 спичек, в том числе и в коробке с номером 8.

6.1. Из города A в город B с равными скоростями выехали Арина и Аркадий. Из города B в город A по той же дороге выехали с одинаковыми скоростями Эмилия и Эдуард. Известно, что Аркадий встретил Эмилию в 13 часов, а Эдуарда в 16 часов. Арина встретила Эмилию в 15 часов. Во сколько часов Арина встретит Эдуарда?

Ответ: 18

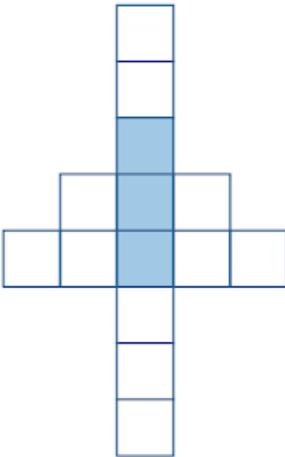
Решение. Аркадий и Арина встретили Эмилию с промежутком в 2 часа. Скорости Арины и Аркадия равны, Эмилии и Эдуарда тоже. Поэтому расстояние между Аркадием и Ариной постоянно, как и между Эмилией и Эдуардом. Значит, скорость сближения Аркадия и Эмилии равна скорости сближения Аркадия и Эдуарда, и точно такая же скорость сближения будет у Арины и Эмилии, Арины и Эдуарда. Поскольку скорости сближения Эмилии и Эдуарда к паре Аркадий-Арина равны, то и проходить каждый из них "мимо" пары Аркадий-Арина они будут одинаковое время, т.е. 2 часа. Если Аркадий встретил Эдуарда в 16 часов, то Арина встретит его спустя 2 часа, то есть в 18 часов.

7.1. Некоторое число записали на доске, умножили на 7, у получившегося произведения стёрли последнюю цифру, умножили на 9, у получившегося числа снова стёрли последнюю цифру и получили 8. Какие числа могли быть записаны изначально?

Ответ: 13, 14 (Все ответы)

Решение. Пусть a — записанное изначально число. $7a = 10x + y$, тогда после стирания последней цифры останется x . $9x = 10p + q$, где q - последняя цифра, после стирания останется p . $p = 8$. Подставим в получившееся до стирания число: $9x = 80 + q$. Так как $80+q$ делится на 9, то $q = 1$. $9x = 81$, $x = 9$, $7a = 90 + y$, где y - последняя цифра. Так как $90 + y$ делится на 7, $y = 1$ или 8. Отсюда и получается ответ: 13 или 14.

8.1. В ячейки изображённой на рисунке фигуры записали без повторения числа от 5 до 18. Затем посчитали все возможные значения сумм в прямоугольниках 1×3 и их сложили. Оказалось, что расположение чисел даёт наибольшее значение данной суммы. Чему может равняться сумма чисел в выделенных ячейках?



Ответ: 50, 51

Решение. Рассмотрим, в скольких различных прямоугольниках находится каждая клетка. Заштрихованные клетки (сверху вниз) повторяются 3, 4, 6 раз. И ещё клетка ниже повторится также 3 раза. Таким образом, чтобы расположить числа требуемым образом, нужно 18 и 17 разместить в клетках, входящих наибольшее число раз — 6 и 4, а 16 и 15 — в клетки, входящие по 3 раза. Понимаем, что есть два варианта — когда в третьей выделенной клетке находится 16 или 15. Имеем $18 + 17 + 16 = 51$ или $18 + 17 + 15 = 50$.

