

Всероссийская олимпиада школьников по математике  
школьный этап 2022-2023  
группа 1  
Задания и решения

18 октября 2022 г.

**7 класс**

**1. Вариант 1.**

Запишите наименьшее число с суммой цифр 62, в записи которого используются по крайней мере три разные цифры.

**Ответ.** 17999999.

Решение:  $62 = 9 \cdot 6 + 8$ . Т.е. число как минимум семизначное. Но если оно семизначное, то в его десятичной записи ровно 6 девяток и 1 восьмёрка. По условию задачи в числе должны быть по крайней мере три различные цифры, поэтому оно как минимум восьмизначное. Первая цифра не меньше 1, а сумма первой и второй не меньше 8. Разбив 8 на  $1+7$ , получаем ответ 17999999.

Вариант 2.

Запишите наименьшее число с суммой цифр 71, в записи которого используются по крайней мере три разные цифры.

**Ответ.** 179999999.

Вариант 3.

Запишите наименьшее число с суммой цифр 80, в записи которого используются по крайней мере три разные цифры.

**Ответ.** 1799999999.

Вариант 4.

Запишите наименьшее число с суммой цифр 89, в записи которого используются по крайней мере три разные цифры.

**Ответ.** 17999999999.

**2. Вариант 1.**

Кафе «Буратино» работает 6 дней в неделю с выходным по понедельникам. Коля произнес два

утверждения: «с 1 по 20 апреля кафе работало 18 дней» и «с 10 по 30 апреля кафе работало тоже 18 дней». Известно, что один раз он ошибся. Сколько дней кафе работало с 1 по 27 апреля?

**Ответ. 23**

Решение. В промежутке с 10 по 30 апреля ровно 21 день. Разбив этот промежуток на три семидневки: с 10-ого по 16-ое, с 17-ого по 23-е, с 24-ого по 30-е – получим ровно один выходной (понедельник) в каждой из трёх семидневок. Следовательно, во втором утверждении Коля сказал правду, тогда в первом – ошибся.

Промежуток с 1-ого по 20-ое разбивается на две семидневки: с 1-ого по 7-ое, с 8-ого по 14-ое – и шестидневку (с 15-ого по 20-е). В двух семидневках 12 рабочих дней, тогда в промежутке с 15-ого по 20-ое могло быть либо шесть рабочих дней, либо пять. Но поскольку Коля здесь ошибся, их было пять. То есть в промежутке 15-20 апреля обязательно был выходной, как и в промежутке 22-27 апреля (ибо он получается сдвигом предыдущего ровно на 7 дней).

Итого, с 1 по 21 апреля кафе работало  $3 \cdot 6 = 18$  дней, и в промежутке с 22 по 27 апреля ещё  $6 - 1 = 5$  дней, то есть всего  $18 + 5 = 23$  дня.

Вариант 2.

Кафе «Буратино» работает 6 дней в неделю с выходным по понедельникам. Коля произнес два утверждения: «с 1 по 20 апреля кафе работало 18 дней» и «с 10 по 30 апреля кафе работало тоже 18 дней». Известно, что один раз он ошибся. Сколько дней кафе работало с 1 по 13 апреля?

**Ответ. 11**

Вариант 3.

Кафе «Буратино» работает 6 дней в неделю с выходным по понедельникам. Коля произнес два утверждения: «с 1 по 20 апреля кафе работало 18 дней» и «с 10 по 30 апреля кафе работало тоже 18 дней». Известно, что один раз он ошибся. Сколько дней кафе работало с 8 по 20 апреля?

**Ответ. 11**

Вариант 4.

Кафе «Буратино» работает 6 дней в неделю с выходным по понедельникам. Коля произнес два утверждения: «с 1 по 20 апреля кафе работало 18 дней» и «с 10 по 30 апреля кафе работало тоже 18 дней». Известно, что один раз он ошибся. Сколько дней кафе работало с 8 по 27 апреля?

**Ответ. 17**

**3. Вариант 1.**

Семья Ивановых состоит из трёх человек: папы, мамы и дочери. Сегодня, в день рождения дочери, мама посчитала сумму возрастов всех членов семьи и получила 74 года. Известно, что 10 лет назад суммарный возраст членов семьи Ивановых составлял 47 лет. Сколько лет сейчас маме, если она родила дочь в 26 лет?

**Ответ. 33.**

Решение. Если бы дочь родилась не менее 10 лет назад, то 10 лет назад суммарный возраст был бы равен  $74 - 30 = 44$  года. Но суммарный возраст на 3 года меньше, значит, дочь родилась 7 лет назад. Маме сейчас  $26 + 7 = 33$  года.

Вариант 2.

Семья Ивановых состоит из трёх человек: папы, мамы и дочери. Сегодня, в день рождения дочери, мама посчитала сумму возрастов всех членов семьи и получила 74 года. Известно, что 10 лет назад суммарный возраст членов семьи Ивановых составлял 47 лет. Сколько лет сейчас маме, если она родила дочь в 25 лет?

**Ответ.** 32.

Вариант 3.

Семья Ивановых состоит из трёх человек: папы, мамы и дочери. Сегодня, в день рождения дочери, мама посчитала сумму возрастов всех членов семьи и получила 74 года. Известно, что 10 лет назад суммарный возраст членов семьи Ивановых составлял 47 лет. Сколько лет сейчас маме, если она родила дочь в 24 года?

**Ответ.** 31.

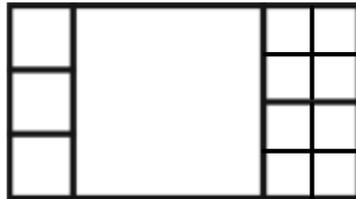
Вариант 4.

Семья Ивановых состоит из трёх человек: папы, мамы и дочери. Сегодня, в день рождения дочери, мама посчитала сумму возрастов всех членов семьи и получила 74 года. Известно, что 10 лет назад суммарный возраст членов семьи Ивановых составлял 47 лет. Сколько лет сейчас маме, если она родила дочь в 23 года?

**Ответ.** 30.

#### 4. Вариант 1.

На рисунке изображен прямоугольник, составленный из двенадцати квадратов. Периметр этого прямоугольника равен 102 см. Чему равна его площадь? Ответ выразите в квадратных сантиметрах.

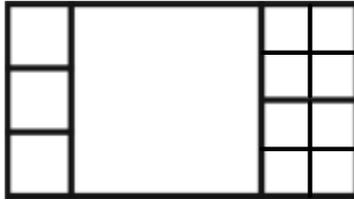


**Ответ.** 594.

Решение. Будем называть квадраты большими (такой один), средними (таких три) и маленькими (таких восемь). Обозначим сторону среднего квадратика через  $4a$ . Тогда сторона большого квадрата равна  $12a$ , а сторона маленьких квадратиков равна  $12a : 4 = 3a$ . Следовательно, стороны прямоугольника равны  $12a$  и  $4a + 12a + 3a + 3a = 22a$ , а периметр  $- 2(12a + 22a) = 68a$ .  $a = 102 : 68 = \frac{3}{2}$ . Площадь равна  $12a \cdot 22a = 264a^2 = 66 \cdot 9 = 594$ .

Вариант 2.

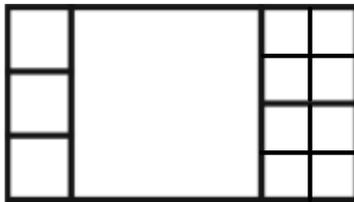
На рисунке изображен прямоугольник, составленный из двенадцати квадратов. Периметр этого прямоугольника равен 136 см. Чему равна его площадь? Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



**Ответ.** 1056.

Вариант 3.

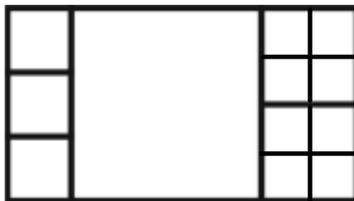
На рисунке изображен прямоугольник, составленный из двенадцати квадратов. Периметр этого прямоугольника равен 170 см. Чему равна его площадь? Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



**Ответ.** 1650.

Вариант 4.

На рисунке изображен прямоугольник, составленный из двенадцати квадратов. Периметр этого прямоугольника равен 204 см. Чему равна его площадь? Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



**Ответ.** 2376.

**5. Вариант 1.**

У организаторов турнира по пинг-понгу только один теннисный стол. Они вызывают на игру двух участников, еще не игравших между собой. Если после окончания игры для проигравшего участника данное поражение становится вторым, то он выбывает из турнира (ничьих в теннисе не бывает). После того, как состоялось 29 игр, оказалось, что выбыли все участники кроме двух. Сколько теннисистов участвовало в турнире?

**Ответ.** 16.

Решение. Каждый игрок выбывает, потерпев ровно два поражения. В ситуации когда остались двое «финалистов», общее количество поражений равно 29. Если из турнира выбыло  $n$  человек, то они суммарно они потерпели  $2n$  поражений, а на счету «финалистов» могло быть 0 (0+0), 1 (0+1) или

2 (1+1) поражения. Учитывая, что  $2n$  и  $2n + 2$  – чётные числа, приходим к уравнению  $2n + 1 = 29$ , откуда  $n = 14$ , а общее количество участников равно 16.

Вариант 2.

У организаторов турнира по пинг-понгу только один теннисный стол. Они вызывают на игру двух участников, еще не игравших между собой. Если после окончания игры для проигравшего участника данное поражение становится вторым, то он выбывает из турнира (ничьих в теннисе не бывает). После того, как состоялось 31 игра, оказалось, что выбыли все участники кроме двух. Сколько теннисистов участвовало в турнире?

**Ответ.** 17.

Вариант 3.

У организаторов турнира по пинг-понгу только один теннисный стол. Они вызывают на игру двух участников, еще не игравших между собой. Если после окончания игры для проигравшего участника данное поражение становится вторым, то он выбывает из турнира (ничьих в теннисе не бывает). После того, как состоялось 33 игры, оказалось, что выбыли все участники кроме двух. Сколько теннисистов участвовало в турнире?

**Ответ.** 18.

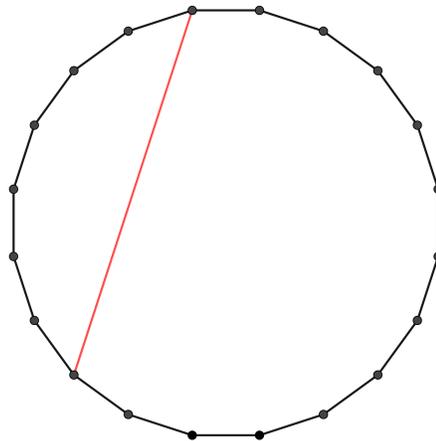
Вариант 4.

У организаторов турнира по пинг-понгу только один теннисный стол. Они вызывают на игру двух участников, еще не игравших между собой. Если после окончания игры для проигравшего участника данное поражение становится вторым, то он выбывает из турнира (ничьих в теннисе не бывает). После того, как состоялось 35 игр, оказалось, что выбыли все участники кроме двух. Сколько теннисистов участвовало в турнире?

**Ответ.** 19.

6. Вариант 1.

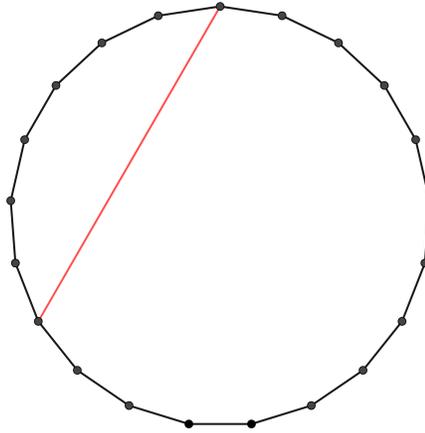
Диагональ 20-угольника разрезает его на 14-угольник и 8-угольник (см. рисунок). Сколько из оставшихся диагоналей 20-угольника пересекают выделенную диагональ? Вершина 14-угольника не считается пересечением.



**Ответ.** 72.

Решение. По одну сторону от проведённой диагонали осталось 12 вершин, по другую – 6. Значит,  $12 \cdot 6 = 72$  диагонали пересекают выделенную.

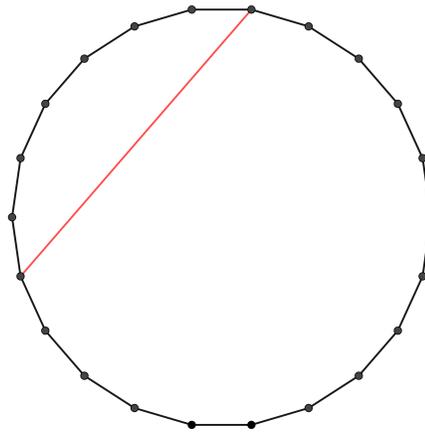
Вариант 2. Диагональ 21-угольника разрезает его на 15-угольник и 8-угольник (см. рисунок). Сколько из оставшихся диагоналей 21-угольника пересекают выделенную диагональ? Вершина 15-угольника не считается пересечением.



**Ответ.** 78.

Вариант 3.

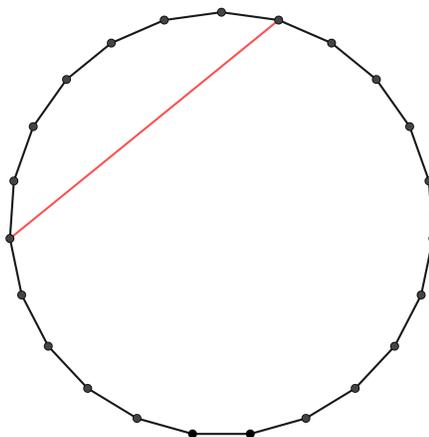
Диагональ 22-угольника разрезает его на 16-угольник и 8-угольник (см. рисунок). Сколько из оставшихся диагоналей 22-угольника пересекают выделенную диагональ? Вершина 16-угольника не считается пересечением.



**Ответ.** 84.

Вариант 4.

Диагональ 23-угольника разрезает его на 17-угольник и 8-угольник (см. рисунок). Сколько из оставшихся диагоналей 23-угольника пересекают выделенную диагональ? Вершина 17-угольника не считается пересечением.



**Ответ.** 90.

**7. Вариант 1.**

У Пети есть семь карточек с цифрами 2, 2, 3, 4, 5, 6, 8. Он хочет, используя все карточки, составить наибольшее натуральное число, кратное 12. Какое число должно у него получиться?

**Ответ.** 8654232.

Решение. Поскольку число кратно 12, то оно кратно и 4, а значит, число, составленное из двух его последних цифр, кратно 4. Такое число не может состоять из двух самых маленьких цифр (22), но может состоять из 2 и 3, причём оно равно 32. Выставляя остальные цифры по убыванию, получим число 8654232.

Вариант 2.

У Пети есть семь карточек с цифрами 2, 2, 3, 4, 5, 8, 9. Он хочет, используя все карточки, составить наибольшее натуральное число, кратное 12. Какое число должно у него получиться?

**Ответ.** 9854232.

Вариант 3.

У Пети есть семь карточек с цифрами 2, 2, 3, 4, 6, 6, 7. Он хочет, используя все карточки, составить наибольшее натуральное число, кратное 12. Какое число должно у него получиться?

**Ответ.** 7664232.

Вариант 4.

У Пети есть семь карточек с цифрами 2, 2, 3, 4, 6, 8, 8. Он хочет, используя все карточки, составить наибольшее натуральное число, кратное 12. Какое число должно у него получиться?

**Ответ.** 8864232.

**8. Вариант 1.**

На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 2023 аборигена, среди которых  $N$  лжецов, встали в круг и каждый сказал: «Оба моих соседа – лжецы». Сколько различных значений может принимать  $N$ ?

**Ответ.** 337.

Решение: Оба соседа рыцаря должны быть лжецами, а соседями лжеца являются либо два рыцаря, либо рыцарь и лжец. Следовательно, три лжеца не могут стоять подряд (так как в этом случае средний лжец скажет правду). Разобьём весь круг на группы лжецов/рыцарей, стоящих подряд. Эти группы чередуются. Каждая «группа рыцарей» состоит из одного человека, каждая «группа лжецов» – из одного или двух. Обозначим через  $x$  количество «одиночных» лжецов, через  $y$  – количество «пар лжецов». Тогда количество рыцарей будет равно  $x + y$ . Получим, что  $(x + y) + (2y + x) = 2023$ ,  $3y + 2x = 2023$ ,  $N = x + 2y$ . Нетрудно заметить, что  $y$  должно быть нечётным.  $x \geq 2$  (так как  $2x$  должно при делении на 3 давать такой же остаток, как 2023), соответственно,  $3y \leq 2019$ ,  $1 \leq y \leq 673$ . В этом промежутке  $674 : 2 = 337$  нечётных чисел, т.е.  $y$  может принимать 337 различных значений. Для каждого из этих значений однозначно определяется количество рыцарей  $x + y$ , а следовательно, и количество лжецов  $x + 2y$  ( $2y + x = 2023 - (x + y)$ ).

Вариант 2.

На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 2029 аборигена, среди которых  $N$  лжецов, встали в круг и каждый сказал: «Оба моих соседа – лжецы». Сколько различных значений может принимать  $N$ ?

**Ответ.** 338.

Вариант 3.

На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 2035 аборигена, среди которых  $N$  лжецов, встали в круг и каждый сказал: «Оба моих соседа – лжецы». Сколько различных значений может принимать  $N$ ?

**Ответ.** 339.

Вариант 4.

На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 2041 аборигена, среди которых  $N$  лжецов, встали в круг и каждый сказал: «Оба моих соседа – лжецы». Сколько различных значений может принимать  $N$ ?

**Ответ.** 340.