7 класс

Задача 7.1. Решите ребус

$$C{,}BA + A{,}AA = B{,}A.$$

(Разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми буквами — одинаковые цифры.)

Ответ: $A = 5$, $B = 9$, $C = 3$.

Решение. Очевидно, что $A \neq 0$ (иначе, например, $C = B$).

Разряд сотых может исчезнуть при суммировании, только если цифры в разряде сотых в сумме оканчиваются на 0. Такое возможно только при $A = 5$. Тогда ребус можно переписать в следующем виде:

$$C{,}B5 + 5{,}55 = B{,}5,$$

$$C{,}B5 + 0,05 = B - 5.$$

В последнем равенстве справа написано целое число, и оно может получиться при суммировании нецелых чисел слева, только если $B = 9$. Тогда последнее равенство переписывается в следующем виде:

$$C{,}95 + 0,05 = 9 - 5.$$

Отсюда уже легко понять, что $C = 3$.

Замечание. Также задачу можно было решать с помощью умножения обеих частей исходного равенства на 100. □

Задача 7.2. Влад и Дима решили подзаработать. Каждый из них решил положить по 3000 рублей в банк, а через год все деньги снять.

Влад выбрал вклад «Уверенность»: за год сумма увеличивается на 20%, но при снятии банк взимает комиссию 10%.

Дима выбрал вклад «Надёжность»: за год сумма увеличивается на 40%, но при снятии банк взимает комиссию 20%.

(«Банк взимает комиссию $n\%$» означает то, что банк оставляет себе $n\%$ от текущей величины вклада, а оставшуюся часть вклада возвращает его владельцу.)

Кто получит большую годовую прибыль от вклада?

Чему будет равна разница? Ответ выразите в рублях. Если прибыль одинакова, то запишите 0.

Ответ: Дима заработает больше на 120 рублей.

Решение. У Влада сумма вклада за год возрастёт до $3000 \cdot 1{,}2$ рублей, а при снятии уменьшится до $3000 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}9 = 3240$ рублей.

У Димы же сумма вклада за год возрастёт до $3000 \cdot 1{,}4$ рублей, а при снятии уменьшится до $3000 \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}8 = 3360$ рублей.

Следовательно, Дима заработает больше на 120 рублей. □

Задача 7.3. Смешарики Крош, Ёжик, Нюша и Бараш суммарно съели 86 конфет, причём каждый из них съел не менее 5 конфет. Известно, что:

- Нюша съела конфет больше, чем каждый из остальных смешариков;
- Крош и Ёжик суммарно съели 53 конфеты.

Сколько конфет съела Нюша?

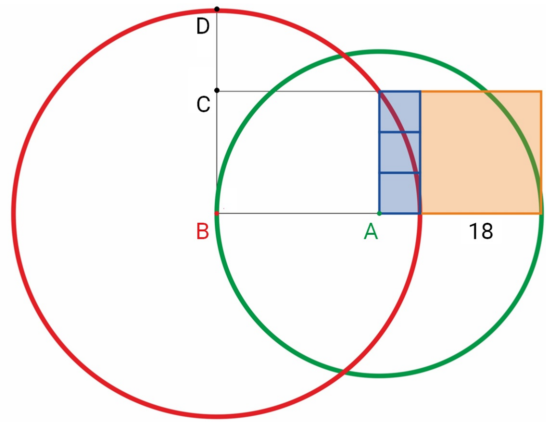
Ответ: 28.

Решение. Крош или Ёжик съел хотя бы 27 конфет (иначе они суммарно съели бы не более $26 + 26 = 52$ конфет), тогда Нюша съела хотя бы 28 конфет. Учитывая, что Бараш съел хотя бы 5 конфет, получаем, что суммарно все они съели хотя бы $53 + 28 + 5 = 86$ конфет. Следовательно, такое возможно, только если Нюша съела ровно 28 конфет, а Бараш — ровно 5 конфет. □

Задача 7.4. На рисунке ниже

- три синие фигуры — квадраты;
- оранжевая фигура — квадрат со стороной 18;
- точка A — центр зелёной окружности;
- точка B — центр красной окружности.

Найдите длину отрезка CD.



Ответ: 12.

Решение. У трёх синих квадратов есть общая сторона, поэтому они равны. Вертикальная сторона оранжевого квадрата, равная 18, состоит из трёх одинаковых вертикальных сторон синих квадратов, поэтому каждая из них равна 6. Значит, радиус зелёной окружности равен $6 + 18 = 24$, и $AB = 24$. Тогда радиус красной окружности равен $24 + 6 = 30$. Чтобы найти длину искомого отрезка, надо из этого радиуса вычесть длину вертикального отрезка, равного стороне оранжевого квадрата: $30 - 18 = 12$. □

Задача 7.5. В магазине продаются орехи четырёх видов: фундук, миндаль, кешью и фисташки. Степан хочет купить 1 килограмм орехов одного вида и ещё 1 килограмм орехов — другого. Он вычислил, во сколько ему может обойтись такая покупка в зависимости от того, какие два вида орехов он выберет. Пять из шести возможных покупок Степана стоили бы 1900, 2070, 2110, 2330 и 2500 рублей. Сколько рублей составляет стоимость шестой возможной покупки?

Ответ: 2290.

Решение. Пусть a, b, c, d — стоимость 1 килограмма фундука, миндаля, кешью и фисташек соответственно. Из условия следует, что множество $A = \{1900, 2070, 2110, 2330, 2500\}$ содержится в множестве $B = \{a + b, b + c, c + d, d + a, a + c, b + d\}$.

Заметим, что 6 элементов множества B можно разбить на 3 пары $(a+b, c+d)$, $(b+c, d+a)$, $(a + c, b + d)$ с одинаковой суммой $a + b + c + d$. Это означает, что в множестве A можно выделить 2 пары чисел с одинаковой суммой.

Нетрудно понять, что это могут быть только пары $(1900, 2500)$ и $(2070, 2330)$ с суммой 4400 (например, можно заметить, что все остальные пары либо пересекаются, либо у их сумм отличаются последние две цифры). Тогда неизвестная шестая стоимость вычисляется без труда: $4400 - 2110 = 2290$ рублей.

Замечание. Условие задачи реализуется для $a = 930$, $b = 970$, $c = 1140$, $d = 1360$.

Задача 7.6. Магический квадрат — это таблица 3×3, в которой расставлены числа так, что суммы по всем строкам, столбцам и двум главным диагоналям одинаковы. На рисунке изображён магический квадрат, в котором все числа, кроме трёх, стёрты. Найдите, чему равно число в левом верхнем углу квадрата.

?	31	9
13		

Ответ: 14.

Решение. Пусть неизвестное число равно x, тогда суммы во всех строках, столбцах и на главных диагоналях равны $9 + 31 + x = 40 + x$.

1) Рассмотрев левый столбец, получаем, что в левом нижнем углу квадрата стоит число 27.

2) Рассмотрев главную диагональ, идущую вправо-вверх, получаем, что в центре квадрата стоит число $4 + x$.

3) Рассмотрев главную диагональ, идущую вправо-вниз, получаем, что в правом нижнем углу квадрата стоит число $36 - 2x$.

4) Рассмотрев правый столбец, получаем, что в средней его клетке стоит число $2x - 5$.

5) Рассмотрев среднюю строку, получаем необходимое уравнение на x:

$$40 + x = 13 + (4 + x) + (2x - 5).$$

Решая его, находим $x = 14$. □

Задача 7.7. Все 25 учеников 7 «А» класса участвовали в викторине из трёх туров. В каждом туре каждый участник набрал некоторое количество очков. Известно, что в каждом туре, а также по сумме всех трёх туров все участники набрали различное количество очков.

Ученик 7 «А» Коля в первом туре викторины оказался третьим, во втором — четвёртым, а в третьем — пятым. Какое самое низкое место мог занять Коля среди всех одноклассников по сумме очков за все три тура викторины?

Ответ: 10.

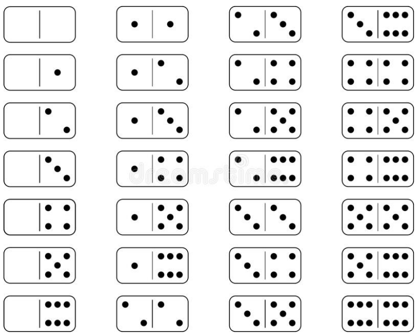
Решение. В первом туре Колю опередили 2 одноклассника, во втором — 3, в третьем — 4. Тогда по сумме всех трёх туров его могли опередить не более $2+3+4=9$ одноклассников, т. е. по сумме трёх туров он не мог оказаться ниже 10-го места.

Теперь приведём пример, как Коля мог оказаться ровно на 10-м месте. Пусть

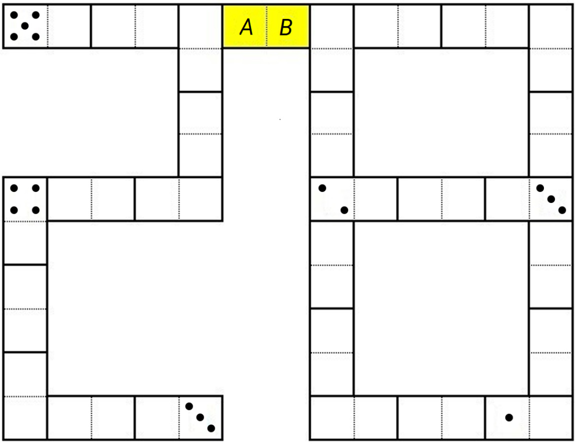
- в каждом из туров Коля набрал по 100 очков;
- в первом туре Андрей и Борис набрали 1000 и 2000 очков соответственно и заняли первые два места;
- во втором туре Влад, Геннадий и Денис набрали 10000, 20000, 30000 очков соответственно и заняли первые три места;
- в третьем туре Маша, Света, Таня, Катя набрали 100000, 200000, 300000, 400000 очков соответственно и заняли первые четыре места;
- в каждом из туров все остальные участники после Коли упорядочились в алфавитном порядке и набрали количество очков, равное их позиции в рейтинге с конца.

Легко видеть, что все условия задачи выполняются. □

Задача 7.8. Набор из 28 различных доминошек выглядит так:



Все эти 28 доминошек выложили так, что количество точек на соприкасающихся половинках доминошек одинаково. На некоторых половинках полностью стёрли количество точек. В итоге получилась конструкция, изображённая на рисунке ниже (пустые половинки могли быть изначально пустыми, а могли содержать какое-то количество точек).



Сколько точек на каждой из половинок жёлтой костяшки?

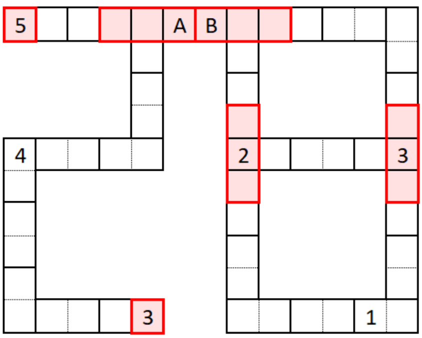
Точек на половинке A: ....

Точек на половинке B: ....

Ответ: $A = 2, B = 5$.

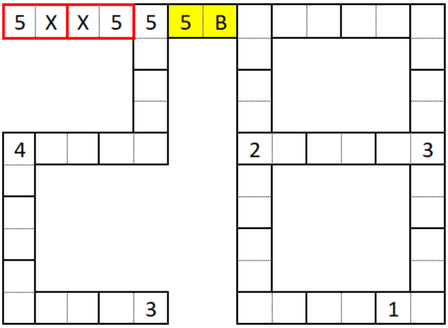
Решение. Сначала заметим, что любое число должно встречаться ровно на 8 половинках доминошек (на 6 доминошках в паре с другими числами и на одной доминошке дважды). То есть каждое число встречается чётное количество раз.

Рассмотрим выделенные красные области из 1 или 3 клеток. По условию числа на соприкасающихся половинках равны, а значит, внутри каждой выделенной области стоят одинаковые числа. Все остальные половинки доминошек разбиваются на пары соседних, где также должны стоять одинаковые числа.



Получаем, что вне выделенных областей каждое число встречается чётное число раз. Значит, чтобы число встречалось чётное число раз во всей раскладке доминошек, количество выделенных красных областей с каждым числом должно быть чётно. Мы знаем, что стоит во всех выделенных областях, кроме областей с половинками A и B. Теперь заметим, что только числа 2 и 5 присутствуют в нечётном количестве (в одной выделенной области), а значит, в областях с половинками A и B, должны стоять именно они.

Осталось понять, где именно стоит 2, а где 5. Предположим, что в половинке A стоит 5, тогда все половинки левее данной определяются однозначно, и две выделенные на картинке доминошки получаются одинаковыми, чего быть не может.



Получаем, что единственный возможный вариант — это $A = 2$ и $B = 5$. □

Замечание. Одна из возможных конфигураций доминошек изображена на рисунке ниже.