7 класс

1. В одном лицее 76% учеников хотя бы раз не делали домашнюю работу, а $\frac{5}{37}$ иногда забывают вторую обувь. Найти количество учеников лицея, если их больше 1000, но меньше 2000.

   Решение. Т.к. 76% = $\frac{76}{100} = \frac{19}{25}$, а числа 25 и 37 – взаимно простые, то количество учеников кратно 25 · 37, т.е. 925k, где k - натуральное. Поскольку $1000 < 925k < 2000$, то k = 2, а количество учеников 925 · 2 = 1850.

Ответ. 1850

Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 0 баллов. Ответ с проверкой – 1 балл. Нет ссылки на взаимную простоту чисел 25 и 37 – снимаем 1 балл. Вычислительные ошибки – снимаем не менее 2 баллов (зависит от влияния на ход решения).

2. Денис поселил у себя хамелеонов, которые могут окрашиваться только в два цвета: красный и коричневый. Сначала красных хамелеонов у Дениса было в пять раз больше, чем коричневых. После того, как два коричневых хамелеона покраснели, количество красных хамелеонов стало в восемь раз больше, чем коричневых. Найдите, сколько хамелеонов у Дениса.

   Решение. Пусть t коричневых хамелеонов было у Дениса. Тогда красных было *5t*. Из условия задачи получаем уравнение $5t + 2 = 8(t - 2)$. Откуда t = *6*. Тогда всего хамелеонов *6t*, то есть 36.

Ответ. 36

Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 0 баллов. Ответ с проверкой – 1 балл. Верно составлено уравнение, но неверно решено не из-за арифметики – не более 4 баллов. Нет обоснования к составлению уравнения, но из контекста понятно, что автор имел в виду – не снимать.

3. Нечётное шестизначное число назовём «*просто клёвым*», если оно состоит из цифр, являющимися простыми числами, и никакие две одинаковые цифры не стоят рядом. Сколько существует «*просто клёвых*» чисел?

   Решение. Всего простых однозначных чисел четыре – 2, 3, 5, 7. Будем расставлять цифры, начиная с наименьшего разряда. В разряде единиц могут стоять три из них – 3, 5, 7. В разряде десятков тоже три из четырёх (все, кроме той, которую поставили в разряд единиц). В разряде сотен тоже три из четырёх (все, кроме той, которую поставили в разряд десятков). И т.д. В результате получим, что количество «просто клёвых» чисел равно 3^6, т.е. 729.

Ответ. 729.

Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 1 балл. В разряд единиц включены все 4 числа – 3 балла. Единица отнесена к простым числам и с учётом этого дальнейшее решение верно – 5 баллов.

4. В крайних горизонталях доски 15x15 стоят два ряда фишек: на нижней горизонтали в каждой клетке стоит белая фишка, а на верхней горизонтали в каждой клетке – чёрная. Каждым ходом игроки сдвигают одну из своих фишек (первый игрок белую, второй – чёрную) на любое количество клеток соответвственно вверх или вниз, при этом нельзя ходить на клетку, где находится фишка противоположного цвета и «перескакивать» через неё. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Может ли кто-то из игроков гарантированно выиграть? Ответ обоснуйте.

   Решение. Выигрывает первый игрок. Первым ходом он сдвигает свою фишку (например, самую левую) на максимально возможное количество клеток и про вертикаль с этой фишкой забывает. Оставшуюся часть доски делит на полоски из двух вертикалей. На каждой такой полоске применяет следующую стратегию: если второй игрок на одной из полосок сделал n ходов вперёд, то первый игрок делает n ходов вперёд на другой вертикали этой же полоски. Если же второй игрок на одной из полосок сделал n ходов назад, то первый игрок делает n ходов вперёд на той же вертикали этой же полоски. В результате после хода первого игрока на каждой из полосок будет равное количество клеток между фишками на обеих вертикалях, а после хода второго на одной из полосок – разное. Значит, у первого игрока всегда есть ход в этой стратегии. Т.к. сумма расстояний между белыми фишками и клетками верхней горизонтали уменьшается с каждым ходом первого игрока, то игра когда-нибудь закончится, а поскольку при этой стратегии у первого игрока всегда есть ход, то второй игрок проиграет.

Рекомендации по проверке. Только верный ответ и (или) описан первый ход – 0 баллов. Присутствует идея разбиения вертикалей на пары и верно описан первый ход, дальнейшего продвижения нет – 1 балл. Верно описана стратегия игры за первого игрока – 3 балла **(а)**. Доказана возможность такой стратегии за первого игрока (т.е. доказано, что после хода второго на какой-либо полоске будет разное число клеток между фишками в вертикалях, т.е. первый может сделать ход по этой стратегии) – 1 балл **(б)**. Доказано, что стратегия выигрывает (т.е. после хода первого вертикалях одной полоски одинаковое число клеток между фишками) – 2 балла **(в)**. Доказано (возможно, неявно), что игра конечная – 1 балл **(г)**. Баллы в пунктах а, б, в, г суммируются.

5. В 3000-м году чемпионат мира по хоккею будет проходить по новым правилам: за победу будут давать 12 очков, за поражение вычитать 5 очков, а за ничью команды очков не получат. Если на этом чемпионате сборная Бразилии сыграет 38 матчей, наберет 60 очков и хотя бы один раз проиграет, то сколько побед она может одержать? Приведите все возможные варианты и обоснуйте, почему других быть не может.

   Решение. Пусть в x матчах Бразилия победит, а в y матчах проиграет. Составим уравнение $12x - 5y = 60$. Видим, что $12x \vdots 12$ и $60 \vdots 12$. НОД(5, 12)=1, т.е. $y \vdots 12$. Возможно: а) y = 12. Тогда получим уравнение 12x – 60 = 60. Т.е. x = 10. Это возможно. б) y = 24. Получим уравнение: 12x – 120 = 60. Откуда x = 15. Это невозможно, т.к. количество матчей уже превышает 38. в) y = 36. Получим 12x – 180 = 60. Откуда x = 20, что также невозможно. Большие значения x не подходят, т.к. уже будет превышено число сыгранных матчей.

Ответ. 10 побед.

Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 0 баллов. Только верный ответ с проверкой – 1 балл. Верно составлено уравнение, дальнейшего продвижения нет (даже с верным ответом и проверкой) – 2 балла. Составлено уравнение, есть идея делимости, дальнейшего продвижения нет – 3 балла. После составления уравнения есть идея делимости, рассмотрен только первый случай и получен верный ответ – 4 балла. После составления уравнения есть идея делимости, рассмотрены только первый и второй случаи, получен верный ответ – 5 баллов. После рассмотрения второго случая без объяснений написано, что далее количество матчей увеличивается – не снимать. Полный перебор с одной вычислительной ошибкой и верным ответом – 5 баллов. Пропущен один случай в полном переборе – не более 4 баллов. Пропущено более одного случая при полном переборе с верным ответом – 1 балл, с неверным ответом – 0 баллов.

6. В ряд встали 3 мальчика и 20 девочек. Каждый из детей посчитал количество девочек, которые находятся левее него, количество мальчиков, которые находятся правее него, и сложил полученные

результаты. Какое наибольшее количество различных сумм могло получиться у детей? (Приведите пример, как могло получиться такое количество и докажите, что большего количества различных чисел получиться не могло.)

Решение. Рассмотрим, как изменяется число, при переходе слева направо на одного человека. Если рядом стоящие дети разного пола, то число не изменяется. Если переходим от девочки к девочке, то число увеличивается на 1, а если от мальчика к мальчику, то уменьшается на 1. Таким образом, самое маленькое число в ряду могло увеличиться не более, чем на 19, а значит, различных чисел не более 20. Приведём пример на 20 различных чисел: поставим последовательно слева направо сначала всех мальчиков, затем всех девочек. Тогда числа в ряду будут: 2, 1, 0, 0, 1, 2, …, 19, всего 20 различных.

Ответ. 20.

Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 0 баллов. Верный пример с верным ответом – 2 балла **(а)**. Проверка того, что при данной расстановке действительно получаются 20 различных чисел – 1 балл **(б)**. Оценка, что более 20 различных чисел быть не может – 4 балла **(в)**. Баллы за пункты а, б, в суммируются.