Условия и решения задач

(муниципальный этап олимпиады 2022 г.)

7 класс

1. На столе лежит N монет. Саша, Миша и Виталик по очереди берут монеты со стола. Саша имеет право брать только 1 монету за каждый свой ход. Миша имеет право за один ход взять со стола ровно 1, 3, 5, 7 или 9 монет. Виталик своим ходом может взять со стола ровно 2, 4, 6, 8 или 10 монет (если на столе осталась ровно 1 монета, то он пропускает свой ход). Побеждает тот, кто заберет со стола своим ходом последнюю монету. Кто победит в этой игре, если Саша определяет порядок, в котором игроки делают ходы (например, сначала Виталик, далее Миша, третьим – Саша), при этом: а) $N = 2023$; б) $N = 2022$.

Решение. а) Саша выбирает такой порядок ходов – сначала Саша, дальше Миша, третьим Виталик. После хода Саши на столе остается 2022 монетs. Миша перед своим ходом имеет четное количество монет, а потому забрать последнюю не может. После его хода на столе остается нечетное количество монет и наступает черед хода Виталика. Он тоже не может забрать последнюю монету. После его хода на столе нечетное количество монет. Далее Саша забирает 1 монету и перед ходом Миши снова на столе четное количество монет. Таким образом забрать последнюю монету не могут ни Миша, ни Виталик. Поскольку после каждого хода количество монет на столе уменьшается, то наступит момент, когда перед ходом Саши на столе будет ровно 1 монета.

Б) Саша определяет порядок ходов таким – Миша, Виталик и последним Саша. Сразу перед ходом Миши на столе четное количество монет и проходят все рассуждения пункта а).

Ответ: в обоих случаях побеждает Саша.

2. На заочной олимпиаде по математике из 500 участников ровно 30 не понравились условия задач, ровно 40 не понравилась организация мероприятия, и наконец, ровно 50 не понравилась способ определения призеров олимпиады. Назовем участника олимпиады «существенно недовольным», если он был недоволен по крайней мере двумя из трех показателей Олимпиады. Сколько максимально могло быть «существенно недовольных» на этой олимпиаде?

Решение. Всего «недовольств» было высказано 120 = 30 + 40 + 50, поэтому не может быть больше 60 «существенно недовольных», потому что тогда они имели вместе больше 120 «недовольств», что противоречит условию. Остается показать, что 60 их могло быть. Например, участники 1 - 40 недовольны организацией мероприятия, 1 - 10 и 41 – 60 – недовольные условиями задач, и участники 11 - 60 недовольны определением призеров.

Ответ: 60.

3. Стороны четырехугольника *ABCD* имеют следующие длины: $AB = 9$, $BC = 2$, $CD = 14$, $DA = 5$. **Найдите длину диагонали *AC*, если известно, что она является целым числом.**

Решение. Применим неравенство треугольника для ΔABC и для ΔACD: для первого будем иметь, что $AB + BC > AC$, то есть что $AC < AB + BC = 11$, а для второго треугольника – что $DA + AC > CD$, то есть $AC > CD - DA = 9$. Таким образом, $9 < AC < 11$, откуда $AC = 10$.

Ответ: $AC = 10$.

4. Есть три попарно различных натуральных числа *a, b, c*. Докажите, что числа 2023 + *a* – *b*, 2023 + *b* – *c*, и 2023 + *c* – *a* не могут быть тремя последовательными натуральными числами.

Решение. Если все три числа сложить и поделить на 3, то получится их среднее арифметическое, оно равно с одной стороны

$$(2023 + a - b + 2023 + b - c + 2023 + c - a) / 3 = 2023,$$

а с другой стороны оно равно среднему из этих трех последовательных чисел.

Таким образом, одно из чисел равно 2023. Например, это $2023 + a - b = 2023$, поэтому $a = b$. А это противоречит тому, что все 3 числа попарно разные.

Что и требовалось доказать.

5. Дедушка, папа и внук пробежали дистанцию от дома до стадиона и обратно. При этом внук туда и обратно бежал с одинаковой скоростью. Дедушка туда бежал вдвое быстрее внука, а обратно в 3 раза медленнее. Папа бежал туда вдвое медленнее внука, а обратно в 3 раза быстрее. В каком порядке они вернутся домой?

Решение. Обозначим скорость внука через x, а расстояние через S. Тогда время забегов внука, папы и дедушки соответственно равны:

$$t_1 = \frac{S}{x} + \frac{S}{x},\ t_2 = \frac{S}{\frac{1}{2}x} + \frac{S}{3x},\ t_3 = \frac{S}{2x} + \frac{S}{\frac{1}{3}x}.$$

То есть надо сравнить такие числа:

$$a_1 = 2,\ a_2 = 2 + \tfrac{1}{3},\ a_3 = \tfrac{1}{2} + 3.$$

Таким образом, первым прибежал внук, вторым – папа, последним – дедушка.

Ответ: первым прибежал внук, вторым – папа, последним – дедушка.