

**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников  
по математике  
2022-2023 учебный год  
7 класс  
Максимальный балл – 35**

1. Все клетки доски  $2 \times 25$  заполнили крестиками и ноликами. У каждого крестика ровно один сосед крестик, у каждого нолика ровно два соседа нолики. Приведите пример такой расстановки (соседями считаются знаки в клетках с общей стороной).

**Решение.** Заметим, что если на доске чередуются столбцы с парой крестиков и квадратики  $2 \times 2$  с ноликами, то все условия выполнены. Повторим 8 раз группу  $2 \times 3$ : в левом столбце пара крестиков, остальные – нолики. И к этой конструкции добавим справа столбец из двух крестиков.

**Критерии.** Полное решение – 7 баллов. Если рассматривается конфигурация как в решении и не указано куда приделать последний столбик из крестиков – 5 баллов. Если пример полностью нарисован и нет пояснений – 7 баллов.

2. Серёжа решил начать правильно питаться и каждый день кушал на одну печенку с шоколадом меньше и на одну печенку без сахара больше, чем в предыдущий день. Всего за время правильного питания он съел 264 печенки с шоколадом и 187 печенок без сахара. Сколько дней Серёжа был на правильном питании?

**Ответ.** 11 дней.

**Решение 1.** Общее количество съеденных печенок каждый день одно и то же. Всего Серёжа съел  $264 + 187 = 451 = 11 \cdot 41$  печенок. Поскольку правильное питание длилось более одного дня и каждый день он съедал более одной печенки, то либо он ел 11 дней по 41 печенке, либо 41 день по 11 печенок. Но так как количество печенок без сахара каждый день увеличивалось на 1, то во втором случае в один из дней оно стало бы больше 11. Поэтому этот случай невозможен.

**Решение 2.** Если "резвернуть в обратную сторону" последовательность количества печенок с шоколадом, а печенки без сахара не трогать, то общее число печенок не изменится, а разность между количеством съеденных в день печенок с шоколадом и печенок без сахара станет постоянной. Так как  $264 - 187 = 77 = 7 \cdot 11$ , то правильное питание длилось либо 7, либо 11, либо 77 дней. Поскольку дней нечётное число, то количество съеденных печенок равно произведению количества дней на число печенок, съеденных в средний день. Но 264 не делится на 7, значит, дней не может быть 7 или 77.

**Критерии.** Полное решение – 7 баллов. Не обосновано почему не может быть другого количества дней, остальное верно - 5 баллов. Только ответ – 1 балл. В задаче предполагается, что событие уже произошло, поэтому от школьника не требуется предъявлять пример того, как Серёжа мог так кушать.

3. Собрались как-то в замке 20 человек, 11 из них мудрецы, которые говорят только правду, а остальные 9 шуты, которые всегда лгут. Вокруг стола сели  $n \geq 3$  человек, каждый из которых заявил "Ровно один из двух моих соседей – шут". При каких  $n$  это возможно? (Необходимо найти все возможные  $n$  и объяснить почему другие быть не могут).

**Ответ.**  $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15$ .

**Решение.** Во-первых, возможен случай, когда за столом одни шуты: при этом подходят все  $n \leq 9$ .

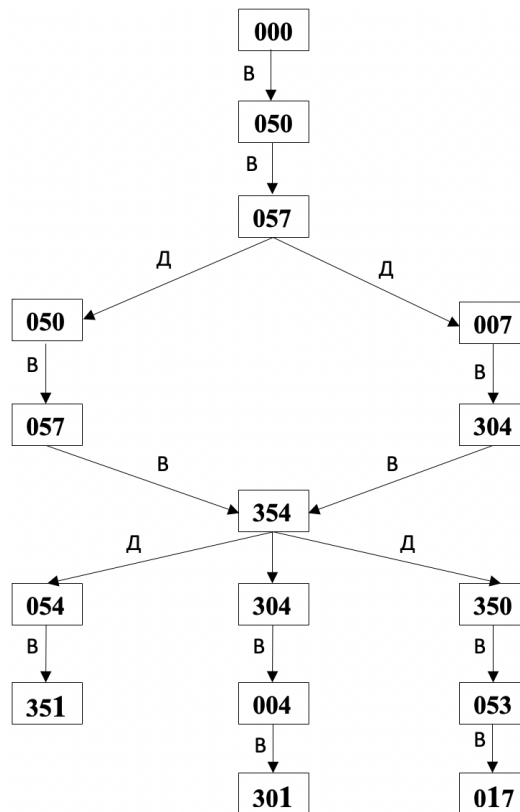
Пусть теперь за столом хотя бы один мудрец. Пусть этот мудрец  $A$  его соседи мудрец  $B$  и шут  $C$ . Тогда с другой стороны от  $B$  сидит шут, а с другой стороны от  $C$  – мудрец. Продолжая эти рассуждения, получаем, что сидящие за столом разбиваются на непересекающиеся тройки, в каждой из которых по два мудреца и одному шуту. Поэтому  $n = 3k$ , и за столом  $k$  шутов и  $2k$  мудрецов. Из условия  $k \leq 9$  и  $2k \leq 11$  следует, что  $k \leq 5$ . Таким образом, добавляются два возможных значения  $n = 12, n = 15$ .

**Критерии.** Полное решение – 7 баллов. За потерю одного случая снимать 2 балла. Если потеряно 3 и больше случаев – 0 баллов. Найдены все варианты, но нет доказательства, что других быть не может – 3 балла.

4. В наказание за плохие оценки родители отправили Васю к бабушке в деревню. Для воспитания своего внука Васи бабушка первым делом запретил ему пользоваться смартфоном и предложил поиграть в следующую игру. У Васи в распоряжении были колодец с водой и три ведра объёмами 3, 5 и 7 литров. Васе требуется с помощью этих вёдер отмерить 1 литр воды. Но есть небольшая загвоздка – после каждого двух переливаний, которые совершает Вася (наполнение ведра считается переливанием, выливание любого количества воды из ведра считается переливанием), бабушка обязательно выливает воду из одного ведра (из любого непустого ведра на свой выбор, если все ведра пустые, то ничего не делает). Если при таких условиях Вася сможет отмерить 1 литр воды, то бабушка отдаст ему смартфон. Сможет ли Вася выиграть в этой игре и получить свой смартфон, несмотря на проделки бабушки? (Как и во всех задачах – играх, предполагается, что обе стороны играют правильно).

**Ответ.** Да, сможет.

**Решение.** Обозначим ходы Васи буквой В, ходы бабушки буквой Д. Далее смотри схему.



**Критерии.** Полное решение – 7 баллов.

5. Есть одна карточка с цифрой 5, две карточки с цифрой 3 и сто карточек с цифрой 2.

а) Сколькими способами можно составить из них *десятизначное* число, у которого произведение цифр оканчивается на 0?

б) Все такие числа выписали подряд по возрастанию. Какое число стоит на 455-м месте?

**Ответ.** а) 460 способов; б) 5 322 222 322.

**Решение.** а) Среди выбранных наверняка окажутся карточки с двойкой, поэтому произведение цифр чётное. Оно оканчивается на 0 тогда и только тогда, когда карточка с пятеркой тоже попала в число выбранных. Карточек с тройкой может быть 0, 1 или 2.

1. Троек нет. Пятёрка может быть на любом из 10 мест, остальные заняты двойками. Таких чисел 10.

2. Тройка одна. Тогда пятёрка может стоять на любом из 10 мест, тройка на любом из 9 оставшихся мест. Таких чисел  $10 \cdot 9 = 90$ .

3. Троек две. Сначала выбираем одно из 10 возможных мест для пятерки, затем пару место из 9 оставшихся для троек. Второе можно сделать  $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$  способами, а всего чисел с одной пятеркой и двумя тройками  $10 \cdot 36 = 360$ .

Сложим числа из трёх групп, получим  $10 + 90 + 360 = 460$  чисел.

б) Место 455 близко к концу, то есть там стоит одно из самых больших чисел. Такие числа начинаются на 53. Их девять: 532...2, 532...23, 532...32, ..., 5332...2. Число 455 – шестое с конца в этом списке, в нём вторая тройка стоит на третьем с конца месте. Значит искомое число 5 322 222 322.

**Критерии.** Полное решение – 7 баллов. Решен правильно только пункт а) – 4 балла. Решен правильно только пункт б) – 3 балла. При попытке выписать все числа (переборное решение), забыто хотя бы одно число – 0 баллов.