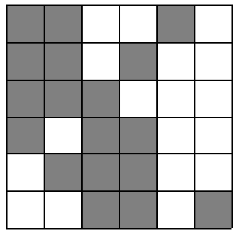
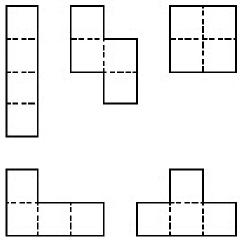
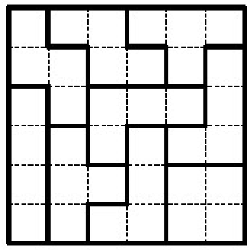
7 класс

1. Закрасьте несколько клеток таблицы 6 × 6 так, чтобы в каждой строке было ровно три закрашенных клетки, а в каждом столбце — либо одна, либо четыре.
   Решение. См. рис.



2. Заполните квадрат размером 6×6 фигурками тетриса (см. рисунок) так, чтобы были использованы фигурки каждого из указанных видов. (Фигурки можно как поворачивать, так и переворачивать.)
   Ответ: См. рис.





3. На межпланетный фестиваль «Радуга» прибыли 107 зелёных и фиолетовых человечков. Зелёные человечки правильно воспринимают цвета, а фиолетовым, к сожалению, зелёный кажется фиолетовым, и наоборот. Посмотрев вокруг, каждый участник фестиваля подошёл к кому-то, сказал «Какой вы фиолетовый!» и подарил кактус. Докажите, что хотя бы один человек на фестивале не получил такого подарка.
   Решение. Из условия следует, что зелёные дарили кактусы фиолетовым, а фиолетовые – зелёным. Так как общее количество человечков нечетно, то какого-то вида больше, чем другого. Допустим, что зелёных больше, тогда какому-то зелёному человечку кактуса не досталось.

4. Биолог последовательно рассаживал 150 жуков в десять банок. Причём в каждую следующую банку он сажал жуков больше, чем в предыдущую. Количество жуков в первой банке составляет не менее половины от количества жуков в десятой банке. Сколько жуков в шестой банке?
   Ответ: 16.
   Решение. Если в первой банке не менее 11 жуков, тогда во второй не менее 12-ти, в третьей – не менее 13-ти, …, в десятой – не менее 20-ти. И во всех банках не менее 11+12+…+20=155 жуков. Противоречие. Значит, в первой банке не более 10-ти жуков.
   В десятой банке минимум на 9 жуков больше, чем в первой, то есть 9 жуков – не более половины жуков в десятой банке, тогда в первой банке должно быть не менее 9-ти жуков. Причем, если их 9, то в десятой может быть только 18. Но 9+10+…+18=135. Противоречие. Значит, в первой банке ровно 10 жуков, а в десятой – максимум 20. Так как чисел от 10 до 20 одиннадцать и 10+11+…+20=165, то отсутсвует вариант с 15-тью жуками в банке, а имеются: 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20. Значит, в шестой банке 16 жуков.

5. В каждую из трех школ микрорайона записалось по 100 первоклассников. 1 сентября в каждую школу пришло ровно 100 первоклассников. Но при этом некоторые дети перепутали, в какую школу им надо было идти, и ровно 40 детей пришли не в свою школу. Докажите, что можно выбрать двух заблудившихся первоклассников и поменять их местами так, что в результате каждый из них окажется в своей школе.
   Решение. Пусть в первую школу пришли x школьников из других школ (и, ссответственно, x школьнков из первой школы пришли не туда), во вторую – y, в третью - z и $x \geq y \geq z$.
   Так как 40 не делится на 3, то $x>z$ и в первой школе не могут быть “чужие” школьники только из третьей школы.
   Если в первой школе только “чужие” школьники из второй школы, то тогда $x=y$, так как во второй школе не хватает “своих” минимум x школьников, и, значит, “чужих” минимум x. И при этом все школьники из второй школы пришли именно в первую. Тогда во второй школе

есть хотя бы один школьник из первой школы, так как $y=x>z$. И можно поменять местами пришедших не туда школьников из первой и второй школ.
Если же в первой школе есть “чужие” школьники как из второй, так и из третьей школы, то тогда можно школьника и первой школы, перепутавшего и пришедшего не в первую школу поменять на соответсвующего “чужого” школьника из первой школы.