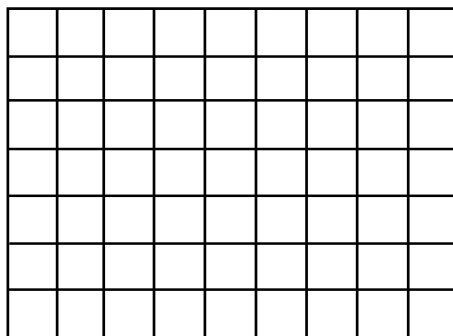
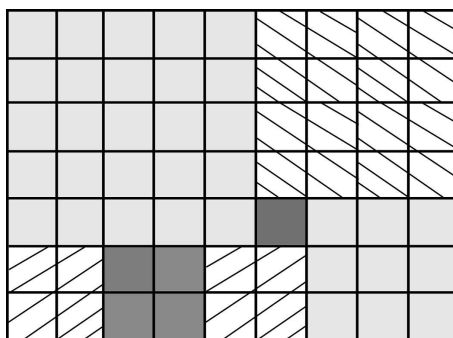


Ленинградская область
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2022-2023 уч.год
7 класс
Решения и ответы

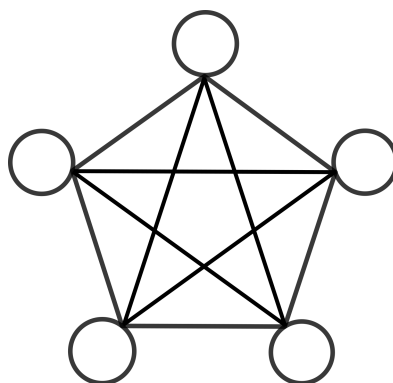
1. Разрежьте прямоугольник 7×9 на 7 квадратов, не обязательно равных между собой. Разрезы можно проводить только по линиям сетки.



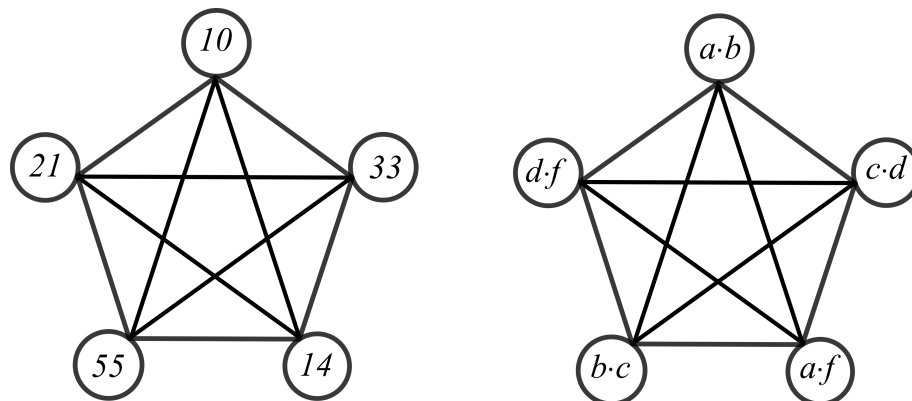
Решение. Одно из возможных разрезов показано на рисунке.



2. Можно ли так расставить натуральные числа в кружочки, чтобы каждая пара чисел, соединенных стороной пятиугольника, не имела общих делителей, а каждая пара чисел, соединенная диагональю, имела общий делитель? Приведите пример или докажите, что числа расставить нельзя. (Рассматриваются общие делители, большие 1).



Решение. Можно, пример показан на рисунке слева. Общий принцип построения примера показан на рисунке справа. Буквами обозначены простые числа.



Ответ. Можно, пример приведен.

3. Сравните числа $x = 2 \cdot 20212021 \cdot 1011 \cdot 202320232023$ и $y = 43 \cdot 47 \cdot 20232023 \cdot 202220222022$.

Решение. Разложим числа на множители $x = 2022 \cdot 2021 \cdot 10001 \cdot 2023 \cdot 100010001$, $y = 2021 \cdot 2023 \cdot 10001 \cdot 2022 \cdot 100010001$. Из разложений видно, что числа равны.

Ответ. $x = y$.

4. В цветочном городе проводится викторина, в которой участвует 7 коротышек. На каждый вопрос в викторине был дан только один неправильный ответ, остальные – правильные. Незнайка дал меньше всех правильных ответов – 19. Знайка дал больше всех правильных ответов – 22. Сколько всего вопросов было в викторине?

Решение. Так как на каждый вопрос были даны 6 правильных ответов, общее число правильных ответов делится на 6. Поскольку Незнайка дал 19 верных ответов, а Знайка – 22, а остальные пятеро – от 20 до 21, то общее число правильных ответов не меньше, чем $19 + 22 + 20 \cdot 5 = 141$, и не больше, чем $19 + 22 + 21 \cdot 5 = 146$. Из чисел в этих пределах только 144 делится на 6, поэтому число вопросов равно $144 : 6 = 24$.

Ответ. 24

5. На болоте есть 64 кочки, они расположены в виде квадрата 8×8 . На каждой кочке сидит лягушка или жаба. Лягушки никогда не обманывают, а жабы говорят только ложь. Каждая из них, и лягушка, и жаба, проквакала: «По крайней мере на одной из соседних кочек сидит жаба». Какое наибольшее количество жаб могло сидеть на этих кочках?

Соседними считаются кочки, расположенные по горизонтали и по вертикали в рядах квадрата, диагональные кочки не считаются соседними.

Решение. Заметим, что на соседних кочках жабы сидеть не могут, иначе они говорили бы правду. Если мы разобьем кочки на пары, то в каждой паре будет не более одной жабы, иначе они говорили бы правду. Поэтому жаб всего не более 32, так как кочки можно разбить на 32 пары. Приведем пример, как можно рассадить 32 жаб. Покрасим кочки 64 шахматной раскраской в два цвета. Если посадить жаб на черные кочки, а лягушек на белые, то условие задачи будет выполняться.

Ответ: 32

6. Ваня задумал семизначное число, а затем вычел из него сумму всех цифр, кроме одной. У него получилось 9875352. Какое число получилось бы у Вани, если бы он вычел сумму всех цифр, кроме второй слева?

Решение. Так как число семизначное, то сумма цифр числа не больше 63. Прибавим к 9875352 63, получим для исходного числа оценку сверху 9875415. Мы видим, что в задуманном числе после вычитания суммы всех цифр старшие четыре разряда не изменятся (в третьем разряде сотен изначально стоит 4 или 3, поэтому брать 1 из четвертого разряда не потребуется). Пусть исходное число имеет вид $\overline{9875abc}$. Если Ваня не вычитал цифру x , то тогда получение числа 9875352 можно записать так:

$$\overline{9875abc} - (9 + 8 + 7 + 5 + a + b + c - x) = 9875352$$

Тогда

$$1000000 \cdot 9 + 100000 \cdot 8 + 10000 \cdot 7 + 1000 \cdot 5 + 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - (9 + 8 + 7 + 5 + a + b + c - x) =$$

$$= 1000000 \cdot 9 + 100000 \cdot 8 + 10000 \cdot 7 + 1000 \cdot 5 + 100 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 2$$

$$100 \cdot a + 10 \cdot b + c - (29 + a + b + c - x) = 100 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 2$$

$$100a + 10b + x - 29 - a - b = 352$$

$$99a + 9b + x = 381$$

Так как a , b и x — это цифры, то может быть только $a = 3$ (2 не хватит, 4 много). Тогда $9b + x = 84$, и отсюда $b = 9$, $x = 3$. Получается, что Ваня в первый раз не вычел 3. Тогда, если вместо 3 не вычитать 8, то получится число на 5 больше. А именно 9875357.

Ответ. 9875357