7 класс

7.1. Десять экскурсоводов водили по залам Эрмитажа десять экскурсионных групп. Составы групп были не обязательно равными, но в среднем в каждой группе было 9 человек. Когда одна из групп закончила экскурсию, среднее количество экскурсантов в группе уменьшилось до 8 человек. Сколько человек было в завершившей экскурсию группе?

Ответ. 18.

Решение. Суммарное количество экскурсантов изначально было равно $9 \cdot 10 = 90$. После того, как одна из групп закончила экскурсию, осталось $8 \cdot 9 = 72$ экскурсанта. Значит, в завершившей экскурсию группе было $90 – 72 = 18$ экскурсантов.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7.2. В школьном спортзале один стол для армрестлинга. Учитель физкультуры организовал школьный турнир. Он вызывает на схватку любых двух участников турнира, еще не встречавшихся друг с другом. Ничьих не бывает. Если участник схватки терпит второе поражение, то он выбывает из турнира. После того, как было проведено 29 схваток, из турнира выбыли все участники, кроме двух. Сколько школьников участвовало в турнире?

Ответ. 16.

Решение. Каждый участник выбывает, потерпев ровно два поражения. В ситуации, когда остались двое «финалистов», общее количество поражений равно 29. Если из турнира выбыло n человек, то они суммарно они потерпели $2n$ поражений, а на счету «финалистов» могло быть 0 (0+0), 1 (0+1) или 2 (1+1) поражения. Учитывая, что $2n$ и $2n+2$ – четные числа, приходим к уравнению $2n+1=29$, откуда $n=14$, а общее количество участников равно 16.
Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7.3. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 35×35 на клетчатые прямоугольники такие, что у каждого из них длина и ширина отличаются на 3?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что такое разрезание возможно. Так как длина и ширина прямоугольника отличаются на 3, то одна из этих величин – четное число. Поэтому площадь каждого прямоугольника разрезания будет четным числом. Значит, и сумма площадей прямоугольников разрезания также будет четным числом. Но эта сумма должна равняться площади квадрата со стороной 35, то есть числу нечетному. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7.4. Четыре пирата разделили добычу в 100 монет. Известно, что среди них ровно два лжеца (которые всегда лгут) и ровно два рыцаря (которые всегда говорят правду).
Они сказали:
Первый пират: «Мы разделили монеты поровну».

Второй пират: «У всех разное количество монет, но каждому досталось хотя бы 15 монет».
Третий пират: «У каждого количество монет делится на 5».
Четвертый пират: «У всех разное количество монет, но каждому досталось не более 35 монет».
Какое максимальное количество монет могло достаться одному пирату?

Ответ. 40 монет

Решение. Заметим, что первый и четвертый пираты не могли одновременно сказать правду.
Если первый пират – рыцарь, то всем досталось по 25 монет (такая ситуация возможна). В этом случае максимальное количество равно 25.
Если же четвертый пират рыцарь, то каждому досталось не больше 35 монет. И в этом случае максимальное количество монет не больше 35.
Если же оба первый и четвертый пираты лжецы, то второй и третий пираты сказали правду. Тогда любым трем пиратам досталось не менее 15+20+25=60 монет, а, значит четвертому не более 40. Такая ситуация возможна, если пиратам досталось 15, 20, 35 и 40 монет. В этом случае максимальное количество равно 40 (и тогда ответ в задаче будет 40).

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Установлены пары ответов, которые не могут одновременно быть правильными – 2 балла.
Доказано, что одному пирату не может достаться более 40 монет – 3 балла.
Приведен пример распределения монет – 2 балла.

7.5. По кругу выписаны 100 целых ненулевых чисел таких, что каждое число больше произведения двух следующих за ним по часовой стрелке чисел. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди этих 100 выписанных чисел?

Ответ. 50.

Решение. Заметим, что два подряд идущих числа не могут быть положительными (то есть натуральными). Предположим противное. Тогда их произведение положительно, и перед ними (против часовой стрелки) также стоит натуральное число. Так как оно больше произведения этих двух натуральных чисел, то оно больше каждого из них. Продолжая рассуждения, мы получим, что все числа будут натуральными, причем, если идти против часовой стрелки, числа будут возрастать. Но когда «круг замкнется», мы придем к противоречию.
Значит, в любой паре соседних чисел есть хотя бы одно отрицательное. Разбив наши 100 чисел на 50 пар, мы получим, что записано не меньше 50 отрицательных чисел, а, значит, положительных чисел не больше 50. Если же мы будем чередовать положительное число 2 и отрицательное число –2, мы получим пример расположения 50 положительных и 50 отрицательных чисел, удовлетворяющих условию задачи.
Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказана невозможность расположения рядом двух положительных чисел – 3 балла.
Доказано, что положительных чисел не больше 50 – еще 1 балл.
Приведен пример с 50 положительными числами – 3 балла.