

**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
по математике
2022-2023 учебный год
7 класс
Максимальный балл – 35
Решения**

1. Все клетки доски 2×24 заполнили единицами и ноликами. У каждой единицы ровно один сосед единица, у каждого нолика ровно два соседа нолика. Приведите пример такой расстановки (соседями считаются знаки в клетках с общей стороной).

Решение. Заметим, что если на доске чередуются столбцы с парой крестиков и квадратики 2×2 с ноликами, то все условия выполнены. Повторим 8 раз группу 2×3 : в левом столбце пара крестиков, остальные – нолики.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Если пример полностью нарисован и нет пояснений – 7 баллов.

2. Матвей решил начать правильно питаться и каждый день кушал на одну булочку меньше и на одну грушу больше, чем в предыдущий день. Всего за время правильного питания он съел 264 булочек и 187 груш. Сколько дней Матвей был на правильном питании?

Ответ. 11 дней.

Решение. Если "резвернуть в обратную сторону" последовательность количества булочек, а груши не трогать, то их суммарное число не изменится, а разность между количеством съеденных в день булочек и груш станет постоянной. Так как $264 - 187 = 77 = 7 \cdot 11$, то правильное питание длилось либо 7, либо 11, либо 77 дней. Поскольку дней нечётное число, то суммарное количество съеденных булочек и груш равно произведению количества дней на число булочек и груш, съеденных в средний день. Но 264 не делится на 7, значит, дней не может быть 7 или 77.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Не обосновано почему не может быть другого количества дней, остальное верно – 5 баллов. Только ответ – 1 балл. В задаче предполагается, что событие уже произошло, поэтому от школьника не требуется предъявлять пример того, как Матвей мог так кушать.

3. Собрались как-то в джунглях 20 зверей, 11 из них тигры, которые говорят только правду, а остальные 9 обезьяны, которые всегда лгут. Вокруг пня сели $n \geq 3$ зверей, каждый из которых заявил "Ровно один из двух моих соседей – обезьяна". При каких n это возможно? (Необходимо найти все возможные n и объяснить почему другие быть не могут).

Ответ. $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15$.

Решение. Во-первых, возможен случай, когда за пнём одни обезьяны: при этом подходят все $n \leq 9$.

Пусть теперь за пнём хотя бы один тигр. Пусть этот тигр A его соседи тигр B и обезьяна C . Тогда с другой стороны от B сидит обезьяна, а с другой стороны от C – тигр. Продолжая эти рассуждения, получаем, что сидящие за пнём разбиваются на непересекающиеся тройки, в каждой из которых по два тигра и одной обезьяне. Поэтому $n = 3k$, и за пнём k обезьян и $2k$ тигров. Из условия $k \leq 9$ и $2k \leq 11$ следует, что $k \leq 5$. Таким образом, добавляются два возможных значения $n = 12, n = 15$.

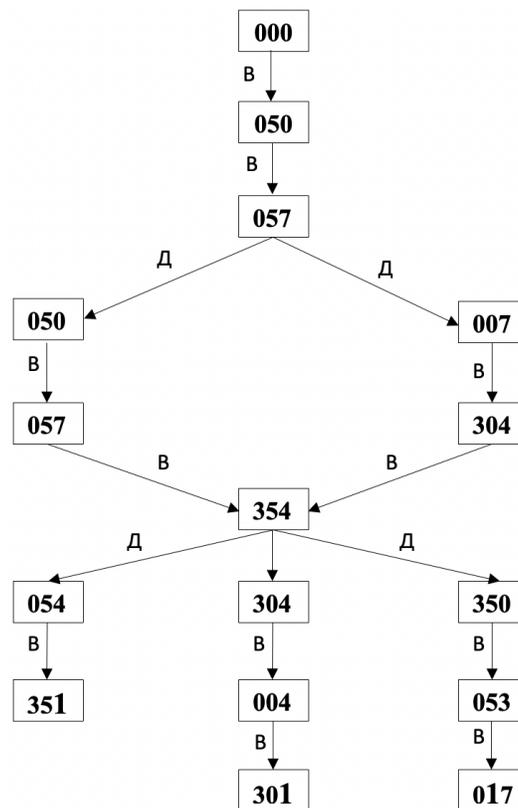
Критерии. Полное решение – 7 баллов. За потерю одного случая снимать 2 балла. Если потеряно 3 и больше случаев – 0 баллов. Найдены все варианты, но нет доказательства, что

других быть не может – 3 балла.

4. Дима и Вася играют в следующую игру. У Васи в распоряжении кран с водой и три кастрюли объёмами 3, 5 и 7 литров. Васе требуется с помощью этих кастрюль отмерить 1 литр воды. Но есть небольшая загвоздка – после каждых двух переливаний, которые совершает Вася (наполнение кастрюли считается переливанием, выливание любого количества воды из кастрюли считается переливанием), Дима обязательно выливает воду из одной из кастрюль (из любой непустой кастрюли на свой выбор, если все кастрюли пусты, то ничего не делает). Если при таких условиях Вася сможет отмерить 1 литр воды, то он победил. Сможет ли Вася выиграть в этой игре, несмотря на действия Димы? (Как и во всех задачах игр предполагается, что обе стороны играют верно).

Ответ. Да, сможет.

Решение. Обозначим ходы Васи буквой В, ходы Димы буквой Д. Далее смотри схему.



Критерии. Полное решение – 7 баллов. Рассуждение вида «Вася будет наливать и выливать бесконечно, поэтому они устанут и он выиграет» – 0 баллов.

5. Есть один листочек с цифрой 5, две листочка с цифрой 3 и сто листочков с цифрой 2.

а) Сколькими способами можно составить из них десятизначное число, у которого произведение цифр оканчивается на 0?

б) Все такие числа выписали подряд по возрастанию. Какое число стоит на 455-м месте?

Ответ. а) 460 способов; б) 5 322 222 322.

Решение. а) Среди выбранных наверняка окажутся карточки с двойкой, поэтому произведение цифр чётное. Оно оканчивается на 0 тогда и только тогда, когда карточка с пятеркой тоже попала в число выбранных. Карточек с тройкой может быть 0, 1 или 2.

1. Троек нет. Пятёрка может быть на любом из 10 мест, остальные заняты двойками.

Таких чисел 10.

2. Тройка одна. Тогда пятёрка может стоять на любом из 10 мест, тройка на любом из 9 оставшихся мест. Таких чисел $10 \cdot 9 = 90$.

3. Троек две. Сначала выбираем одно из 10 возможных мест для пятерки, затем пару место из 9 оставшихся для троек. Второе можно сделать $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ способами, а всего чисел с одной пятеркой и двумя тройками $10 \cdot 36 = 360$.

Сложим числа из трёх групп, получим $10 + 90 + 360 = 460$ чисел.

б) Место 455 близко к концу, то есть там стоит одно из самых больших чисел. Такие числа начинаются на 53. Их девять: 532...2, 532...23, 532...32, ..., 5332...2. Число 455 – шестое с конца в этом списке, в нём вторая тройка стоит на третьем с конца месте. Значит искомое число 5 322 222 322.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Решен правильно только пункт а) – 4 балла. Решен правильно только пункт б) – 3 балла. При попытке выписать все числа (переборное решение), забыто хотя бы одно число – 0 баллов.