

Всероссийская олимпиада школьников по математике
школьный этап 2022-2023
группа 1
Задания и решения

18 октября 2022 г.

8 класс

1. Вариант 1.

Сейчас маме 24 года и 3 месяца, а её дочери — 5 месяцев. Через сколько месяцев число лет в возрасте мамы будет равно числу месяцев в возрасте дочери?

Ответ. 21.

Решение. Пусть x — нужное количество месяцев. Тогда получим уравнение: $24 + (x+3)/12 = x+5$. Отсюда $x = 21$.

Вариант 2.

Сейчас маме 23 года и 8 месяцев, а её дочери — 9 месяцев. Через сколько месяцев число лет в возрасте мамы будет равно числу месяцев в возрасте дочери?

Ответ. 16.

Вариант 3.

Сейчас маме 19 лет и 4 месяца, а её дочери — 1 месяц. Через сколько месяцев число лет в возрасте мамы будет равно числу месяцев в возрасте дочери?

Ответ: 20.

Вариант 4.

Сейчас маме 20 лет и 10 месяцев, а её дочери — 8 месяцев. Через сколько месяцев число лет в возрасте мамы будет равно числу месяцев в возрасте дочери?

Ответ. 14.

2. Вариант 1.

В игре «Математическая бегодня» участвовали девять команд (не обязательно равных по числу участников). В среднем, в каждой команде было 7 человек. После того, как одну команду дисквалифицировали, среднее число участников в оставшихся командах сократилось до 6. Сколько участников было в дисквалифицированной команде?

Ответ. 15.

Решение. Суммарное количество участников до дисквалификации было равно $7 \cdot 9 = 63$. После дисквалификации участников осталось $6 \cdot 8 = 48$. Значит, в дисквалифицированной команде было $63 - 48 = 15$ участников.

Вариант 2.

На научный симпозиум приехали десять делегаций (не обязательно равных по числу участников). В среднем в каждой делегации было 6 человек. После того, как члены одной делегации заболели и в полном составе уехали домой, среднее число участников в оставшихся делегациях сократилось до 4. Сколько участников было в заболевшей делегации?

Ответ. 24.

Вариант 3.

Пять альпинистских групп (не обязательно равных по числу участников) отправились покорять вершину. В среднем, в каждой группе было 14 человек. После того, как одна группа повернула обратно из-за травмы участника, среднее число альпинистов в оставшихся увеличилось до 15. Сколько участников было в группе, сошедшей с дистанции?

Ответ. 10.

Вариант 4.

Поезд состоит из шести вагонов. В среднем, в каждом вагоне едет 18 пассажиров. После того, как один вагон отцепили, среднее число пассажиров в оставшихся вагонах сократилось до 15. Сколько пассажиров находилось в отцепленном вагоне?

Ответ. 33.

3. Вариант 1.

Высота AH и биссектриса CL треугольника ABC пересекаются в точке O . Найдите угол BAC , если известно, что разность между углом COH и половиной угла ABC равна 46° .

Ответ. 92.

Решение. Обозначим половины углов A, B, C треугольника ABC через x, y и z соответственно. Тогда, $\angle COH = 90^\circ - z$ и $46^\circ = 90^\circ - z - y$. А так как $x + y + z = 90^\circ$, то $x = 44$ и $\angle BAC = 92^\circ$.

Вариант 2.

Высота AH и биссектриса CL треугольника ABC пересекаются в точке O . Найдите угол BAC , если известно, что разность между углом COH и половиной угла ABC равна 47° .

Ответ. 94.

Вариант 3.

Высота AH и биссектриса CL треугольника ABC пересекаются в точке O . Найдите угол BAC , если известно, что разность между углом COH и половиной угла ABC равна 48° .

Ответ. 96.

Вариант 4.

Высота AH и биссектриса CL треугольника ABC пересекаются в точке O . Найдите угол BAC , если известно, что разность между углом COH и половиной угла ABC равна 49° .

Ответ. 98.

4. Вариант 1.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде единиц ровно на 1 больше цифры в разряде десятков. Число не может начинаться с нуля.

Ответ. 810.

Решение. Старшую цифру числа можно выбрать 9 способами (любая, кроме нуля). Цифру в разряде сотен – 10 способами (подойдёт любая цифра). Цифра в разряде десятков – любая от 0 до 8, а цифра в разряде единиц однозначно определяется выбранной цифрой в разряде десятков. Всего вариантов $9 \cdot 10 \cdot 9 = 810$.

Вариант 2.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде единиц ровно на 2 больше цифры в разряде сотен. Число не может начинаться с нуля.

Ответ. 720.

Вариант 3.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде сотен ровно на 3 больше цифры в разряде единиц. Число не может начинаться с нуля.

Ответ. 630.

Вариант 4.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде единиц ровно на 4 меньше цифры в разряде десятков. Число не может начинаться с нуля.

Ответ. 540.

5. Вариант 1.

На стол положили две квадратные салфетки размерами 1×1 и 2×2 так, что угол большей салфетки попал в центр меньшей. Какую максимальную площадь стола могут закрывать салфетки?

Ответ. 4.75

Решение. Большая салфетка накрывает четверть маленькой. Это можно понять, продлив стороны большого квадрата. Поэтому площадь пересечения – 0.25, и площадь объединения салфеток – $1 + 4 - 0.25 = 4.75$.

Вариант 2.

На стол положили две квадратные салфетки размерами 1×1 и 3×3 , так, что угол большой салфетки попал в центр меньшей. Какую максимальную площадь стола могут закрывать салфетки?

Ответ. 9.75

Вариант 3.

На стол положили две квадратных салфетки размерами 1×1 и 4×4 , так, что угол большой салфетки попал в центр меньшей. Какую максимальную площадь стола могут закрывать салфетки?

Ответ. 16.75

Вариант 4.

На стол положили две квадратных салфетки размерами 2×2 и 3×3 , так, что угол большой салфетки попал в центр меньшей. Какую максимальную площадь стола могут закрывать салфетки?

Ответ. 12.

6. Вариант 1.

Художественный фильм продолжительностью 192 минуты состоит из четырёх частей. При этом известно, что продолжительность любых двух частей отличается не менее, чем на 6 минут. Какую наибольшую продолжительность может иметь самая короткая часть? Ответ выразите в минутах.

Ответ. 39.

Решение. Обозначим минимальную часть за x минут, тогда вторая (по продолжительности) не меньше, чем $x + 6$, третья – не меньше, чем $x + 12$, четвертая – не меньше, чем $x + 18$. Тогда весь фильм длится не менее, чем $4x + 36$ минут. Решая неравенство $192 \geq 4x + 36$, получаем $x \leq 39$. Подходит продолжительность частей в 39, 45, 51 и 57 минут.

Вариант 2.

Художественный фильм продолжительностью 188 минут состоит из четырёх частей. При этом известно, что продолжительность любых двух частей отличается не менее, чем на 4 минуты. Какую наибольшую продолжительность может иметь самая короткая часть? Ответ выразите в минутах.

Ответ. 41.

Вариант 3.

Художественный фильм продолжительностью 154 минуты состоит из четырёх частей. При этом известно, что продолжительность любых двух частей отличается не менее, чем на 5 минут. Какую наибольшую продолжительность может иметь самая короткая часть? Ответ выразите в минутах.

Ответ. 31.

Вариант 4.

Художественный фильм продолжительностью 154 минуты состоит из четырёх частей. При этом известно, что продолжительность любых двух частей отличается не менее, чем на 7 минут. Какую наибольшую продолжительность может иметь самая короткая часть? Ответ выразите в минутах.

Ответ. 28.

7. Вариант 1.

В выпуклом n -угольнике выделили диагональ. Выделенную диагональ пересекают ровно 14 других диагоналей этого n -угольника. Найдите сумму всех возможных значений n . Вершина n -угольника не считается пересечением.

Ответ. 28.

Решение. Пусть по одну сторону от диагонали x сторон, по другую – $n - x$. Тогда по одну

сторону $-x-1$ вершин, по другую $-n-x-1$. Они могут быть концами нужных диагоналей. Получаем $14 = (x-1)(n-x-1)$.

Возможны следующие варианты:

$x-1 = 14, n-x-1 = 1$, тогда $n = 17$;

$x-1 = 1, n-x-1 = 14$, тогда $n = 17$;

$x-1 = 2, n-x-1 = 7$, тогда $n = 11$;

$x-1 = 7, n-x-1 = 2$, тогда $n = 11$.

Вариант 2.

В выпуклом n -угольнике выделили диагональ. Выделенную диагональ пересекают ровно 22 из других диагоналей этого n -угольника. Найдите сумму всех возможных значений n . Вершина n -угольника не считается пересечением.

Ответ. 40.

Вариант 3.

В выпуклом n -угольнике выделили диагональ. Выделенную диагональ пересекают ровно 21 из других диагоналей этого n -угольника. Найдите сумму всех возможных значений n . Вершина n -угольника не считается пересечением.

Ответ. 36.

Вариант 4.

В выпуклом n -угольнике выделили диагональ. Выделенную диагональ пересекают ровно 26 из других диагоналей этого n -угольника. Найдите сумму всех возможных значений n . Вершина n -угольника не считается пересечением.

Ответ. 46.

8. Вариант 1.

На острове невезения живут правдолюбы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 2023 аборигена, среди которых N лжецов, встали в круг, и каждый сказал: «Оба моих соседа – лжецы». Сколько различных значений может принимать N ?

Ответ. 337.

Решение: Оба соседа рыцаря должны быть лжецами, а соседями лжеца являются либо два рыцаря, либо рыцарь и лжец. Следовательно, три лжеца не могут стоять подряд (так как в этом случае средний лжец скажет правду). Разобьём весь круг на группы лжецов/рыцарей, стоящих подряд. Эти группы чередуются. Каждая «группа рыцарей» состоит из одного человека, каждая «группа лжецов» – из одного или двух. Обозначим через x количество «одиночных» лжецов, через y – количество «пар лжецов». Тогда количество рыцарей будет равно $x+y$, $x+y+2y+x = 2023$, $3y+2x = 2023$, $N = x+y$. Нетрудно заметить, что y должно быть нечётным, $x \geq 2$ (так как $2x$ должно при делении на 3 давать такой же остаток, как 2023), соответственно, $3y \leq 2019$, $1 \leq y \leq 673$. В этом промежутке $674:2=337$ нечётных чисел, т.е. y может принимать 337 различных значений. Для каждого из этих значений однозначно определяется количество рыцарей $x+y$, а следовательно, и количество лжецов $x+2y$ ($2y+x = 2023 - (x+y)$)

Вариант 2.

На острове невезения живут правдолюбы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 1027 аборигена, среди которых N лжецов, встали в круг, и каждый сказал: «Оба

моих соседа – лжецы». Сколько различных значений может принимать N ?

Ответ. 171.

Вариант 3.

На острове невезения живут правдолюбы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 1123 аборигена, среди которых N лжецов, встали в круг, и каждый сказал: «Оба моих соседа – лжецы». Сколько различных значений может принимать N ?

Ответ. 187.

Вариант 4.

На острове невезения живут правдолюбы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 1243 аборигена, среди которых N лжецов, встали в круг, и каждый сказал: «Оба моих соседа – лжецы». Сколько различных значений может принимать N ?

Ответ. 207.