

Всероссийская олимпиада школьников по математике  
школьный этап 2022-2023  
группа 1  
Задания и решения

18 октября 2022 г.

8 класс

1. Вариант 1.

Сейчас маме 24 года и 3 месяца, а её дочери — 5 месяцев. Через сколько месяцев число лет в возрасте мамы будет равно числу месяцев в возрасте дочери?

**Ответ.** 21.

Решение. Пусть  $x$  — нужное количество месяцев. Тогда получим уравнение:  $24 + (x+3)/12 = x+5$ . Отсюда  $x = 21$ .

Вариант 2.

Сейчас маме 23 года и 8 месяцев, а её дочери — 9 месяцев. Через сколько месяцев число лет в возрасте мамы будет равно числу месяцев в возрасте дочери?

**Ответ.** 16.

Вариант 3.

Сейчас маме 19 лет и 4 месяца, а её дочери — 1 месяц. Через сколько месяцев число лет в возрасте мамы будет равно числу месяцев в возрасте дочери?

**Ответ:** 20.

Вариант 4.

Сейчас маме 20 лет и 10 месяцев, а её дочери — 8 месяцев. Через сколько месяцев число лет в возрасте мамы будет равно числу месяцев в возрасте дочери?

**Ответ.** 14.

2. Вариант 1.

В игре «Математическая бегодня» участвовали девять команд (не обязательно равных по числу участников). В среднем, в каждой команде было 7 человек. После того, как одну команду дисквалифицировали, среднее число участников в оставшихся командах сократилось до 6. Сколько участников было в дисквалифицированной команде?

**Ответ.** 15.

Решение. Суммарное количество участников до дисквалификации было равно  $7 \cdot 9 = 63$ . После дисквалификации участников осталось  $6 \cdot 8 = 48$ . Значит, в дисквалифицированной команде было  $63 - 48 = 15$  участников.

Вариант 2.

На научный симпозиум приехали десять делегаций (не обязательно равных по числу участников). В среднем в каждой делегации было 6 человек. После того, как члены одной делегации заболели и в полном составе уехали домой, среднее число участников в оставшихся делегациях сократилось до 4. Сколько участников было в заболевшей делегации?

**Ответ.** 24.

Вариант 3.

Пять альпинистских групп (не обязательно равных по числу участников) отправились покорять вершину. В среднем, в каждой группе было 14 человек. После того, как одна группа повернула обратно из-за травмы участника, среднее число альпинистов в оставшихся увеличилось до 15. Сколько участников было в группе, сошедшей с дистанции?

**Ответ.** 10.

Вариант 4.

Поезд состоит из шести вагонов. В среднем, в каждом вагоне едет 18 пассажиров. После того, как один вагон отцепили, среднее число пассажиров в оставшихся вагонах сократилось до 15. Сколько пассажиров находилось в отцепленном вагоне?

**Ответ.** 33.

**3.** Вариант 1.

Высота  $AH$  и биссектриса  $CL$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите угол  $BAC$ , если известно, что разность между углом  $COH$  и половиной угла  $ABC$  равна  $46^\circ$ .

**Ответ.** 92.

Решение. Обозначим половины углов  $A, B, C$  треугольника  $ABC$  через  $x, y$  и  $z$  соответственно. Тогда,  $\angle COH = 90^\circ - z$  и  $46^\circ = 90^\circ - z - y$ . А так как  $x + y + z = 90^\circ$ , то  $x = 44$  и  $\angle BAC = 92^\circ$ .

Вариант 2.

Высота  $AH$  и биссектриса  $CL$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите угол  $BAC$ , если известно, что разность между углом  $COH$  и половиной угла  $ABC$  равна  $47^\circ$ .

**Ответ.** 94.

Вариант 3.

Высота  $AH$  и биссектриса  $CL$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите угол  $BAC$ , если известно, что разность между углом  $COH$  и половиной угла  $ABC$  равна  $48^\circ$ .

**Ответ.** 96.

Вариант 4.

Высота  $AH$  и биссектриса  $CL$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите угол  $BAC$ , если известно, что разность между углом  $COH$  и половиной угла  $ABC$  равна  $49^\circ$ .

**Ответ.** 98.

#### 4. Вариант 1.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде единиц ровно на 1 больше цифры в разряде десятков. Число не может начинаться с нуля.

**Ответ.** 810.

Решение. Старшую цифру числа можно выбрать 9 способами (любая, кроме нуля). Цифру в разряде сотен – 10 способами (подойдёт любая цифра). Цифра в разряде десятков – любая от 0 до 8, а цифра в разряде единиц однозначно определяется выбранной цифрой в разряде десятков. Всего вариантов  $9 \cdot 10 \cdot 9 = 810$ .

Вариант 2.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде единиц ровно на 2 больше цифры в разряде сотен. Число не может начинаться с нуля.

**Ответ.** 720.

Вариант 3.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде сотен ровно на 3 больше цифры в разряде единиц. Число не может начинаться с нуля.

**Ответ.** 630.

Вариант 4.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде единиц ровно на 4 меньше цифры в разряде десятков. Число не может начинаться с нуля.

**Ответ.** 540.

#### 5. Вариант 1.

На стол положили две квадратные салфетки размерами  $1 \times 1$  и  $2 \times 2$  так, что угол большей салфетки попал в центр меньшей. Какую максимальную площадь стола могут закрывать салфетки?

**Ответ.** 4.75

Решение. Большая салфетка накрывает четверть маленькой. Это можно понять, продлив стороны большого квадрата. Поэтому площадь пересечения – 0.25, и площадь объединения салфеток –  $1 + 4 - 0.25 = 4.75$ .

Вариант 2.

На стол положили две квадратные салфетки размерами  $1 \times 1$  и  $3 \times 3$ , так, что угол большой салфетки попал в центр меньшей. Какую максимальную площадь стола могут закрывать салфетки?

**Ответ.** 9.75

Вариант 3.

На стол положили две квадратных салфетки размерами  $1 \times 1$  и  $4 \times 4$ , так, что угол большой салфетки попал в центр меньшей. Какую максимальную площадь стола могут закрывать салфетки?

**Ответ.** 16.75

Вариант 4.

На стол положили две квадратных салфетки размерами  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$ , так, что угол большой салфетки попал в центр меньшей. Какую максимальную площадь стола могут закрывать салфетки?

**Ответ.** 12.

6. Вариант 1.

Художественный фильм продолжительностью 192 минуты состоит из четырёх частей. При этом известно, что продолжительность любых двух частей отличается не менее, чем на 6 минут. Какую наибольшую продолжительность может иметь самая короткая часть? Ответ выразите в минутах.

**Ответ.** 39.

Решение. Обозначим минимальную часть за  $x$  минут, тогда вторая (по продолжительности) не меньше, чем  $x + 6$ , третья – не меньше, чем  $x + 12$ , четвертая – не меньше, чем  $x + 18$ . Тогда весь фильм длится не менее, чем  $4x + 36$  минут. Решая неравенство  $192 \geq 4x + 36$ , получаем  $x \leq 39$ . Подходит продолжительность частей в 39, 45, 51 и 57 минут.

Вариант 2.

Художественный фильм продолжительностью 188 минут состоит из четырёх частей. При этом известно, что продолжительность любых двух частей отличается не менее, чем на 4 минуты. Какую наибольшую продолжительность может иметь самая короткая часть? Ответ выразите в минутах.

**Ответ.** 41.

Вариант 3.

Художественный фильм продолжительностью 154 минуты состоит из четырёх частей. При этом известно, что продолжительность любых двух частей отличается не менее, чем на 5 минут. Какую наибольшую продолжительность может иметь самая короткая часть? Ответ выразите в минутах.

**Ответ.** 31.

Вариант 4.

Художественный фильм продолжительностью 154 минуты состоит из четырёх частей. При этом известно, что продолжительность любых двух частей отличается не менее, чем на 7 минут. Какую наибольшую продолжительность может иметь самая короткая часть? Ответ выразите в минутах.

**Ответ.** 28.

7. Вариант 1.

В выпуклом  $n$ -угольнике выделили диагональ. Выделенную диагональ пересекают ровно 14 других диагоналей этого  $n$ -угольника. Найдите сумму всех возможных значений  $n$ . Вершина  $n$ -угольника не считается пересечением.

**Ответ.** 28.

Решение. Пусть по одну сторону от диагонали  $x$  сторон, по другую –  $n - x$ . Тогда по одну

сторону  $-x-1$  вершин, по другую  $-n-x-1$ . Они могут быть концами нужных диагоналей. Получаем  $14 = (x-1)(n-x-1)$ .

Возможны следующие варианты:

$x-1 = 14, n-x-1 = 1$ , тогда  $n = 17$ ;

$x-1 = 1, n-x-1 = 14$ , тогда  $n = 17$ ;

$x-1 = 2, n-x-1 = 7$ , тогда  $n = 11$ ;

$x-1 = 7, n-x-1 = 2$ , тогда  $n = 11$ .

Вариант 2.

В выпуклом  $n$ -угольнике выделили диагональ. Выделенную диагональ пересекают ровно 22 из других диагоналей этого  $n$ -угольника. Найдите сумму всех возможных значений  $n$ . Вершина  $n$ -угольника не считается пересечением.

**Ответ.** 40.

Вариант 3.

В выпуклом  $n$ -угольнике выделили диагональ. Выделенную диагональ пересекают ровно 21 из других диагоналей этого  $n$ -угольника. Найдите сумму всех возможных значений  $n$ . Вершина  $n$ -угольника не считается пересечением.

**Ответ.** 36.

Вариант 4.

В выпуклом  $n$ -угольнике выделили диагональ. Выделенную диагональ пересекают ровно 26 из других диагоналей этого  $n$ -угольника. Найдите сумму всех возможных значений  $n$ . Вершина  $n$ -угольника не считается пересечением.

**Ответ.** 46.

## 8. Вариант 1.

На острове невезения живут правдолюбы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 2023 аборигена, среди которых  $N$  лжецов, встали в круг, и каждый сказал: «Оба моих соседа – лжецы». Сколько различных значений может принимать  $N$ ?

**Ответ.** 337.

Решение: Оба соседа рыцаря должны быть лжецами, а соседями лжеца являются либо два рыцаря, либо рыцарь и лжец. Следовательно, три лжеца не могут стоять подряд (так как в этом случае средний лжец скажет правду). Разобьём весь круг на группы лжецов/рыцарей, стоящих подряд. Эти группы чередуются. Каждая «группа рыцарей» состоит из одного человека, каждая «группа лжецов» – из одного или двух. Обозначим через  $x$  количество «одиночных» лжецов, через  $y$  – количество «пар лжецов». Тогда количество рыцарей будет равно  $x+y$ ,  $x+y+2y+x = 2023$ ,  $3y+2x = 2023$ ,  $N = x+y$ . Нетрудно заметить, что  $y$  должно быть нечётным,  $x \geq 2$  (так как  $2x$  должно при делении на 3 давать такой же остаток, как 2023), соответственно,  $3y \leq 2019$ ,  $1 \leq y \leq 673$ . В этом промежутке  $674:2=337$  нечётных чисел, т.е.  $y$  может принимать 337 различных значений. Для каждого из этих значений однозначно определяется количество рыцарей  $x+y$ , а следовательно, и количество лжецов  $x+2y$  ( $2y+x = 2023 - (x+y)$ )

Вариант 2.

На острове невезения живут правдолюбы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 1027 аборигена, среди которых  $N$  лжецов, встали в круг, и каждый сказал: «Оба

моих соседа – лжецы». Сколько различных значений может принимать  $N$ ?

**Ответ.** 171.

Вариант 3.

На острове невезения живут правдолюбы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 1123 аборигена, среди которых  $N$  лжецов, встали в круг, и каждый сказал: «Оба моих соседа – лжецы». Сколько различных значений может принимать  $N$ ?

**Ответ.** 187.

Вариант 4.

На острове невезения живут правдолюбы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 1243 аборигена, среди которых  $N$  лжецов, встали в круг, и каждый сказал: «Оба моих соседа – лжецы». Сколько различных значений может принимать  $N$ ?

**Ответ.** 207.