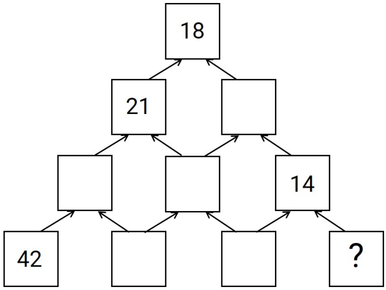
8 класс

Задача 8.1. Клетки пирамиды заполнили по следующему правилу: над каждыми двумя соседними числами записали их среднее арифметическое. Некоторые числа стёрли, и получилась конструкция, изображённая на рисунке. Какое число было в правой нижней клетке? (Среднее арифметическое двух чисел — это их сумма, разделённая на 2.)



□

Ответ: 6.

Решение. Восстановим числа в таблице, пройдя по ней сверху вниз. Например, если во второй строке стоят числа 21 и x, то из $18 = \frac{1}{2}(21 + x)$ получаем $x = 15$. Аналогично в третьей строке получаем, что рядом с числом 14 стоит 16, а рядом с ним — 26; в последней строке стоят числа 42, 10, 22 и 6.

Задача 8.2. Малыши Коля и Маша учатся считать. В первую секунду Коля назвал число 1, во вторую — 2, в третью — 3 и т. д. Если Маше нравится число, названное Колей, то она записывает его себе в тетрадь, в конец текущей строки (одно число за другим, без пробелов и запятых). Спустя n секунд у Маши в тетради оказалось записано

$$2\,7\,2\,6\,2\,5\,2\,4\,2\,3.$$

Какое наименьшее значение может принимать n?

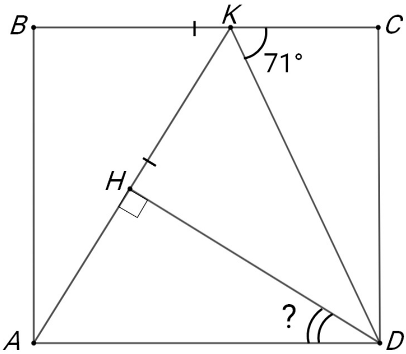
□

Ответ: 423.

Решение. Спустя n секунд Маша дописала в конец строки число n. Если это число состоит из 1 или 2 цифр, то оно равно 3 или 23, но оба этих числа, как нетрудно понять, не подходят. Значит, n состоит хотя бы из 3 цифр, и $n \geqslant 423$.

Осталось заметить, что n может быть равно 423, если Маше нравятся числа 2, 7, 26, 252, 423.

Задача 8.3. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ отмечена точка K. Точка H на отрезке AK такова, что $\angle AHD = 90°$. Оказалось, что $AK = BC$. Сколько градусов составляет угол ADH, если $\angle CKD = 71°$?



Ответ: 52.

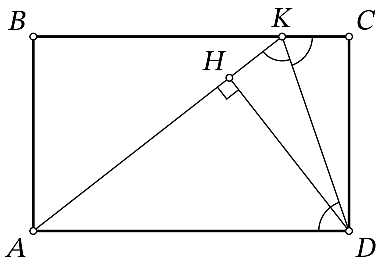


Рис. 5: к решению задачи 8.3

Решение. Поскольку $BC \parallel AD$, получаем $\angle ADK = \angle CKD = 71°$ (рис. 5).

Поскольку $AK = BC = AD$, треугольник AKD является равнобедренным и $\angle AKD = \angle ADK = 71°$. Тогда $\angle KAD = 180° - 2 \cdot 71° = 38°$ и $\angle ADH = 90° - \angle KAD = 52°$. □

Задача 8.4. По кругу стоят 36 детей, каждый из них одет в красную или синюю кофту. Известно, что рядом с каждым мальчиком стоит девочка, а рядом с каждой девочкой стоит человек в синей кофте. Найдите наибольшее возможное количество девочек в красных кофтах.

Ответ: 24.

Решение. Заметим. что не найдётся 3 стоящих подряд девочек в красных кофтах (иначе для средней из них не выполняется условие). Разбив 36 детей на 12 троек, получаем, что в каждой из них не более 2 девочек в красных кофтах, а всего девочек в красных кофтах не больше $2 \cdot 12 = 24$.

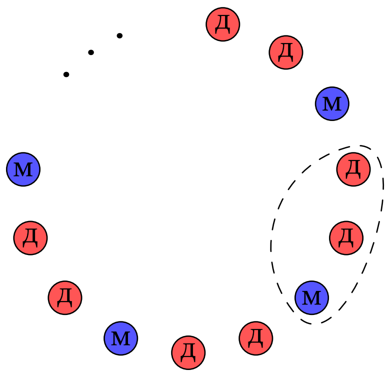


Рис. 6: к решению задачи 8.4

Пример построить легко: в каждой из 12 троек по часовой стрелке располагаются две девочки в красных кофтах, а следом за ними мальчик в синей кофте (рис. 6). Ясно, что все условия задачи выполняются. □

Задача 8.5. Из города в деревню выехал автомобиль, одновременно с ним из деревни в город выехал велосипедист. Когда автомобиль и велосипедист встретились, автомобиль сразу же развернулся и поехал обратно в город. В итоге велосипедист приехал в город на 35 минут позже автомобиля. Сколько минут затратил велосипедист на весь путь, если известно, что его скорость в 4,5 раза меньше скорости автомобиля?

Ответ: 55.

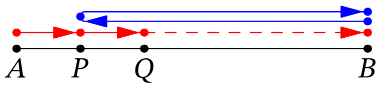


Рис. 7: к решению задачи 8.5

Решение. На рис. 7 отметим деревню A, город B, точку P встречи автомобиля и велосипедиста, а также точку Q, где оказался велосипедист в момент возвращения автомобиля в город. Поскольку скорости автомобиля и велосипедиста различаются в 4,5 раза, то $AP : PB = 1 : 4{,}5 = 2 : 9$. Поскольку автомобиль потратил на перемещения $B \to P$ и $P \to B$ одинаковое время, то и велосипедист потратил на соответствующие перемещения $A \to P$ и $P \to Q$ одинаковое время. Следовательно, $AP : PQ : QB = 2 : 2 : 7$.

Поскольку велосипедист потратил на перемещение $Q \to B$ ровно 35 минут, то на всё перемещение $A \to B$ он потратил пропорциональное время: $35 \cdot \frac{11}{7} = 55$ минут. □

Задача 8.6.

Паша выписал в порядке возрастания все натуральные делители натурального числа k и их пронумеровал: первый, второй, ...

Паша заметил, что если шестой делитель умножить на тринадцатый делитель, то получится исходное число k.

Сколько натуральных делителей имеет число k?

Ответ: 18.

Решение. Пусть натуральные делители числа k упорядочены так:

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_6 < \ldots < d_{13} < \ldots < d_{m-1} < d_m = k.$$

Заметим, что числа

$$k = \frac{k}{d_1} > \frac{k}{d_2} > \ldots > \frac{k}{d_6} > \ldots > \frac{k}{d_{13}} > \ldots > \frac{k}{d_{m-1}} > \frac{k}{d_m} = 1$$

также являются делителями числа k, они различны, и их столько же. Значит, это те же самые числа, только в обратном порядке. Получаем, что

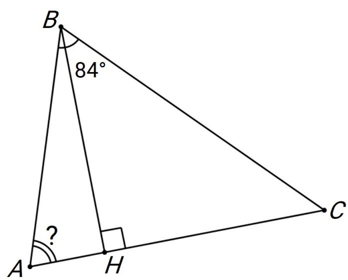
$$d_1 = \frac{k}{d_m}, \ d_2 = \frac{k}{d_{m-1}}, \ \ldots, \quad d_m = \frac{k}{d_1}.$$

Таким образом, делители разбиваются на пары «противоположных», дающих в произведении исходное число k:

$$k = d_1 \cdot d_m = d_2 \cdot d_{m-1} = \ldots$$

В каждой такой паре сумма индексов делителей равна $m + 1$. Поскольку по условию $d_6 \cdot d_{13} = k$, получаем, что $m = 6 + 13 - 1 = 18$. □

Задача 8.7. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Оказалось, что $CH = AB + AH$. Сколько градусов составляет угол BAC, если $\angle ABC = 84°$?



Ответ: 64.

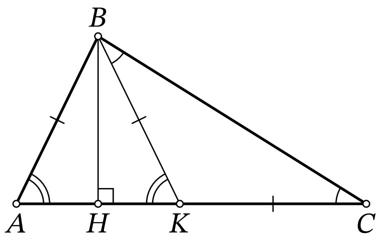


Рис. 8: к решению задачи 8.7

Решение. Отметим на отрезке CH точку K такую, что $AH = HK$. Тогда из условия следует, что $AB = CK$ (рис. 8).

В треугольнике ABK высота BH совпадает с медианой, поэтому он является равнобедренным, $AB = BK$ и $\angle BAH = \angle BKA$.

Пусть $\angle ACB = x$. Поскольку $CK = AB = BK$, треугольник BCK является равнобедренным, и $\angle KBC = \angle KCB = x$. Тогда $\angle AKB = 2x$, $\angle KAB = 2x$ и $\angle ABC = 180° - 3x$.

Поскольку $84° = \angle ABC = 180° - 3x$, находим $x = 32°$. Тем самым, $\angle BAC = 2 \cdot 32° = 64°$. $\square$

Задача 8.8. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Однажды собрались 10 жителей острова, все они надели на себя футболки с номерами от 1 до 10 (у разных жителей разные номера). Каждый из них сказал одну из фраз:

- «Среди собравшихся нет рыцаря, номер футболки которого больше моего»
- «Среди собравшихся нет лжеца, номер футболки которого меньше моего».

Известно, что каждая из этих фраз прозвучала ровно 5 раз. Сколько рыцарей могло быть среди этих 10 жителей? Укажите все возможные варианты.

Ответ: $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Решение. Рассмотрим людей, сказавших первую фразу. Среди них не более одного рыцаря (в ином случае рыцарь с наименьшим номером среди них соврал бы). Таким образом, всего рыцарей не больше 6.

Также среди всех присутствующих есть хотя бы 1 рыцарь (в ином случая все лжецы, говорившие первую фразу, говорили бы правду).

Для каждого количества рыцарей от 1 до 6 существует пример. Пусть люди говорят фразы в порядке их номеров футболок. Запишем в ряд номера произнесенных ими фраз:

- $2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1$: всего 6 рыцарей с номерами 1—5 и 10.

- 2, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1: всего 5 рыцарей с номерами 1—4 и 10.
- 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1: всего 4 рыцаря с номерами 1—3 и 10.
- 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1: всего 3 рыцаря с номерами 1—2 и 10.
- 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1: всего 2 рыцаря с номерами 1 и 10.
- 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1: всего 1 рыцарь с номером 10. □