Школьный этап ВСОШ по математике, 2022-2023 учебный год, 8 класс.

1.1. *Гирьки с весами 1, 2, 3, 4, 8, 16 граммов разложили на две кучки с равными весами. В первой из них две гири, во второй — четыре гири. Какие две гири лежат в первой кучке?*

Ответ: 1, 16 (Все ответы)

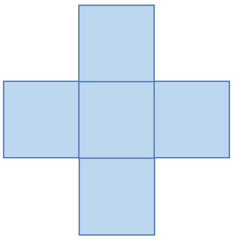
Решение. Сумма весов гирь равна 34 грамма, т.е. в каждой кучке по 17 граммов. Двумя гирями набрать 17 граммов можно только одним способом — $16+1$: если не взять 16 граммов, то двумя гирями мы наберём не более $8+4=12$ граммов.

2.1. *В ряд выписаны все натуральные числа без пробелов: 12345678910111213 .... Какой по счёту цифрой от начала является двенадцатая девятка?*

Ответ: 174

Решение. Первая девятка стоит на девятом месте, вторая — на 29-м (между первой и второй девятками начинаем писать двузначные числа), третья — на 49-м, и т.д. Девятая девятка (от числа 89) стоит на $9+2\cdot 80=169$-м месте (числа от 1 до 9 занимают по одному месту, а числа от 10 до 89 по два). Далее выписаны 90919293.... Отсюда двенадцатая девятка — на 174-м месте.

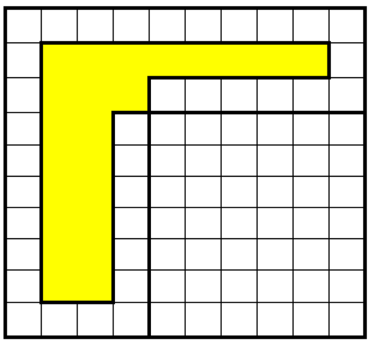
3.1. *Из клетчатого квадрата со стороной 40 вырезали прямоугольник* 36×37*, примыкающий к одному из углов квадрата. Гриша хочет в оставшемся куске закрасить пятиклеточный крестик. Сколькими способами он это может сделать?*



Ответ: 113

Решение 1. Если бы прямоугольник не вырезали, количество способов закрасить крестик было бы $38\times 38=1444$ (крестик определяется своей центральной клеткой, а она не может примыкать к краю). Из-за вырезания теряется $36\times 37-1$ способ (центр креста не может быть в вырезанном прямоугольнике или примыкать к его стороне, но может иметь общую вершину с вершиной вырезанного прямоугольника). Отсюда получается ответ.

Решение 2. Пусть невырезанными остались четыре первых столбца и три первых строки. Тогда центр крестика можно поставить во второй или третий столбец (но не в первую и не в последнюю строки), или во вторую строку (исключая первые три столбца, а также последний), а ещё в пересечение третьей строки и третьего столбца.



4.1. *Каждый вечер, начиная с первого сентября, маленький Антоша съедал по пирожному. После очередного пирожного он заметил, что за всё это время съел 10 вкусных пирожных (остальные ему показались невкусными). Но среди любых семи подряд съеденных пирожных не менее трёх оказывались вкусными. Какое наибольшее количество пирожных мог съесть Антоша?*

Ответ: 26

Решение. Покажем, что среди 27 пирожных будет не менее 11 вкусных пирожных. Пронумеруем пирожные от 1 до 27. Заметим, что среди первых семи пирожных не менее трёх — вкусные, среди следующих семи — тоже, и среди пирожных с номерами от 15 до 21 — ещё хотя бы три (итого нашлось уже девять вкусных).

Среди пирожных с номерами от 21 до 27 также оказалось не менее трёх вкусных. Одно из них мы могли сосчитать раньше (если пирожное с номером 21 вкусное), но ещё как минимум два вкусных пирожных будут иметь номера от 22 до 27. Таким образом, более 26 пирожных быть не могло.

Заметим, что 26 пирожных быть могло. Пример такой: пусть вкусными являются пирожные с номерами 5, 6, 7, 12, 13, 14, 19, 20, 21, 26. Нетрудно заметить, что условия задачи выполняются.

5.1. *Найдите наименьшее натуральное n такое, что натуральное $n^2 + 14n + 13$ делится на 68.*

Ответ: 21

Решение. Заметим, что $n^2 + 14n + 13 = (n + 1)(n + 13)$, а $68 = 4 \cdot 17$. Значит, одно из чисел $n + 1$ и $n + 13$ делится на 17. К тому же n должно быть нечётным, иначе $n + 1$ и $n + 13$ окажутся нечётными. Наименьшее такое натуральное n равно $2 \cdot 17 - 13 = 21$. Заметим, что оно подходит так как $21^2 + 14 \cdot 21 + 13 = (21 + 1) \cdot (21 + 13) = 22 \cdot 34 = 11 \cdot 68$.

6.1. *Второго сентября Робин Бобин съел 12 кур, а начиная с третьего сентября ел каждый день столько, сколько уже съел в среднем за сентябрь. Пятнадцатого сентября Робин Бобин съел 32 курицы. Сколько кур он съел первого сентября?*

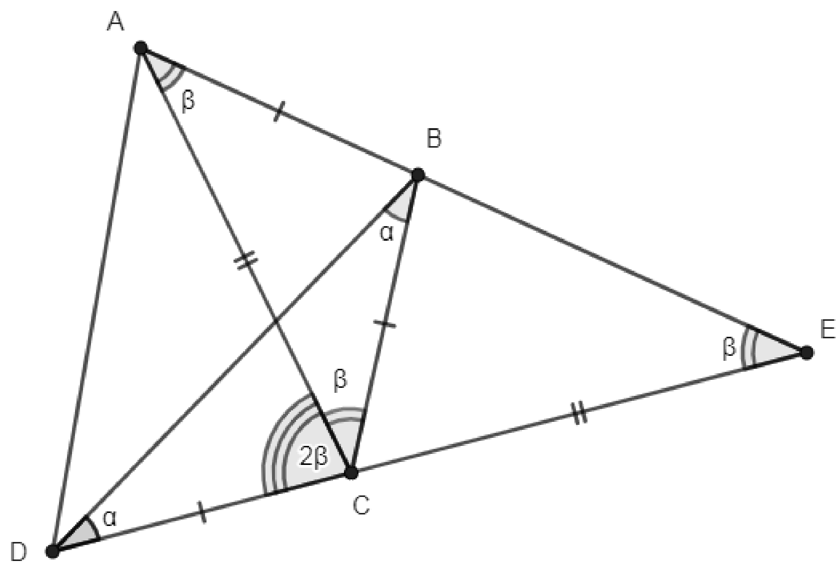
Ответ: 52

Решение. Пусть к началу k-го дня он в среднем съел x кур. Это значит, что к этому моменту он съел $(k-1)x$ кур. Тогда в k-й день съедено тоже x кур, а значит, за k дней съедено kx кур. Это значит, что после k-го дня среднее количество съеденных кур не поменялось, а значит, и в $k+1$-й день будет съедено столько же. Значит, это среднее количество равно 32 курам. Таким образом, в первые два дня Робин Бобин съел 64 куры, т.е. в первый день — 52 куры.

7.1. *В четырёхугольнике $ABCD$ $AB = BC = CD$. Пусть E — точка пересечения AB и CD (B между A и E). Оказалось, что $AC = CE$ и $\angle DBC = 15°$. Найдите $\angle AED$.*

Ответ: 50°

Решение. Решим общую задачу. Пусть $\angle DBC = \alpha$, а $\angle BEC = \beta$. Из равнобедренности ΔDCB получаем $\angle BDC = \alpha$. Из равнобедренности ΔACE получим $\angle BEC = \angle BAC$, а из равнобедренности ΔABC — равенство $\angle BAC = \angle ACB = \beta$. Тогда $\angle ACD = 2\beta$ как внешний. Получаем, что сумма углов в треугольнике BCD равна $2\alpha + 3\beta = 180°$. В нашей задаче $\alpha = 15°$, тогда $\beta = \dfrac{180° - 2 \cdot 15°}{3} = 50°$.



8.1. *Есть 15 прямоугольных листов бумаги. За каждый ход выбирается один из листов и делится прямолинейным разрезом, не проходящим через вершины, на два листа. После 60 ходов оказалось, что все листки — треугольники или шестиугольники. Сколько шестиугольников?*

Ответ: 25

Решение. Пусть после 60 разрезов образовалось x шестиугольников и $75 - x$ треугольников (было 15 листов, и с каждым разрезом количество листов увеличивается на 1). Теперь посчитаем количество сторон. Было $15 \cdot 4 = 60$ сторон, а с каждым разрезом их число увеличивается на 4 (разрез делит надвое две стороны листа, да ещё сам считается как сторона в двух новых листах). Получаем, что после 60 разрезов оказывается 300 сторон. Зная, сколько сторон у каждого треугольника и шестиугольника, получим $300 = 3(75 - x) + 6x$, откуда $x = 25$.