8 класс

1. Денис поселил у себя хамелеонов, которые могут окрашиваться только в два цвета: красный и коричневый. Сначала красных хамелеонов у Дениса было в пять раз больше, чем коричневых. После того, как два коричневых хамелеона покраснели, количество красных хамелеонов стало в восемь раз больше, чем коричневых. Найдите, сколько хамелеонов у Дениса.

   Решение. Пусть t коричневых хамелеонов было у Дениса. Тогда красных было $5t$. Из условия задачи получаем уравнение $5t + 2 = 8(t - 2)$. Откуда $t = 6$. Тогда всего хамелеонов $6t$, то есть 36.

Ответ. 36

   Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 0 баллов. Ответ с проверкой – 1 балл. Верно составлено уравнение, но неверно решено не из-за арифметики – не более 4 баллов. Нет обоснования к составлению уравнения, но из контекста понятно, что автор имел в виду – не снимать.

2. Про различные положительные числа a и b известно, что
$$a^3 - b^3 = 3(2a^2b - 3ab^2 + b^3).$$
   Во сколько раз большее число превосходит меньшее?

   Решение. Рассмотрим и преобразуем разность:

   $0=a^3 - b^3 - 3(2a^2b - 3ab^2 + b^3) =$
   $$(a-b)(a^2+ab+b^2) - 3\big(2ab(a-b) - b^2(a-b)\big) =$$
   $$(a-b)(a^2+ab+b^2-6ab+3b^2) =$$
   $(a-b)(a^2-5ab+4b^2) = (a-b)(a-4b)(a-b)$

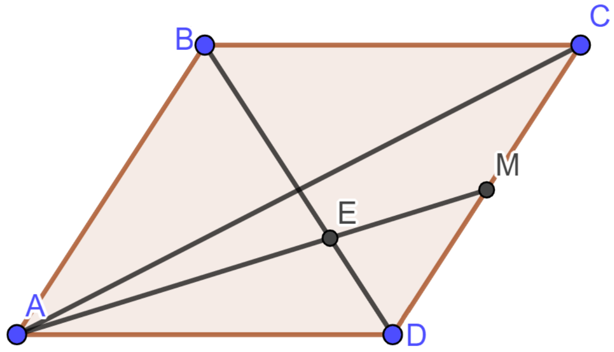
   По условию $a \neq b$, тогда получаем $\mathrm{a} = 4\mathrm{b}$, значит большое число в 4 раза больше.

   Ответ: 4.

   Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 0 баллов. Ответ с проверкой – 2 балла. Выделен один множитель $a - b$ – не менее 2 баллов, выделено 2 множителя $a - b$ – не менее 4 баллов.

3. В параллелограмме *ABCD* точка *M* – середина *CD*, а отрезки *AM* и *BD* пересекаются в точке *E*. Определите, какую часть площади параллелограмма составляет площадь треугольника *DME*.

4. Решение. Точка E это точка пересечения медиан ΔACD, поэтому $EM = \frac{1}{3}AM$, следовательно $S_{EMD} = \frac{1}{3}S_{AMD} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}S_{ACD} = \frac{1}{6}\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{12}S_{ABCD}$



Ответ: 1/12.

Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 0 баллов. Рассмотрены только частные случаи (квадрат и/или прямоугольник) – не более 2 баллов. Доказано первое равенство в цепочке – 3 балла, второе и третье по 1 баллу. Баллы предыдущего предложения суммируются, но не суммируются с частным случаем.

5. Нечётное шестизначное число назовём «*просто клёвым*», если оно состоит из цифр, являющимися простыми числами и никакие две одинаковые цифры не стоят рядом. Сколько существует «*просто клёвых*» чисел?

Решение. Всего простых однозначных чисел четыре – 2, 3, 5, 7. Будем расставлять цифры, начиная с наименьшего разряда. В разряде единиц могут стоять три из них – 3, 5, 7. В разряде десятков тоже три из четырёх (все, кроме той, которую поставили в разряд единиц). В разряде сотен тоже три из четырёх (все, кроме той, которую поставили в разряд десятков). И т.д. В результате получим, что количество «просто клёвых» чисел равно 3^6, т.е. 729.
Ответ. 729.
Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 1 балл. В разряд единиц включены все 4 числа – 3 балла. Единица отнесена к простым числам и с учётом этого дальнейшее решение верно – 5 баллов

6. На доске рядом с числом 2022 написали неизвестное положительное число, меньшее 2022. Затем одно из чисел на доске заменили на их среднее арифметическое. Такую замену провели ещё 9 раз, при этом среднее арифметическое всегда оказывалось целым числом. Найдите меньшее из чисел, написанных на доске изначально.
Решение. Пусть на доске в какой-то момент написаны числа a и b, причем $a > b$, тогда заметим, что после указанной операции разница между числами станет в 2 раза меньше какое бы число мы ни стирали, поскольку

$$a - b = 2\left(a - \frac{a+b}{2}\right) = 2\left(\frac{a+b}{2} - b\right).$$

Тогда после 10 операций имеем $2022 - x = 2^{10} * \Delta$, где x – написанное неизвестное число, а Δ - последняя разница, получаем $x = 2022 - 1024\Delta$, так как x положительно, то единственно возможное натуральное значение для $\Delta -$ это 1, значит $x = 998$.

Ответ. 998.

Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 1 балл. Верный ответ при предположении, что каждый раз стирали наибольшое число или наименьшее – не более 2 баллов. Формула (1) или доказанное аналогичное утверждение – не менее 3 баллов. Без обоснования предполагается, что последняя разность равна 1, снимать 2 балла.

7. Авиакомпания «Вперед» обслуживала 50 аэропортов, причем из каждого был как минимум один маршрут. Из-за сокращения числа самолетов авиакомпания вынуждена отменить некоторые маршруты. Во избежание недовольства пассажиров требуется, чтобы из каждого аэропорта осталось хотя бы по одному маршруту. Докажите, что независимо от начальной схемы маршрутов можно сократить их так, что останется не менее 30 аэропортов, из которых есть только один маршрут.

Решение. Если есть маршрут, соединяющий 2 города, из которых есть более одного маршрута, – то его можно сократить. Будем делать эту процедуру пока возможно, после нее из каждого города останется не более одного маршрута. Из города, где более одного маршрута, все маршруты идут в города с одним маршрутом. Обозначим количество городов с одним маршрутом за x, тогда городов с более чем одним маршрутом $50 - \text{x}$, так как их не менее чем 2 и они ведут в города с не более чем одним маршрутом, то получаем неравество:

$$2(50 - x) < x$$

Из которого находим $\text{x} > {}^{100}/_{3}$, следовательно $\text{x} \geq 34$ и тем более x не меньше 30.

Рекомендации по проверке. Описано когда можно сокращать маршруты – не менее 1 балла, получено неравенство – не менее 4 баллов.