# Условия и решения задач

**(районная математическая олимпиада 2022 г.)**

## 8 класс

**1. Существуют ли целые числа *x*, *y*, *z*, удовлетворяющие равенству:**

$$(x + y)(y + z)(z + x) = 2023?$$

*Решение*. Если бы такие три числа $x$, $y$ и $z$ существовали, по крайней мере два из них имели бы одинаковую четность. Предположим, что это пара чисел $x$ и $y$. Тогда сумма $x + y$ четная, а значит, четным должно быть и произведение $(x + y)(y + z)(z + x)$. Число же 2023, которому это произведение должно равняться, – нечетное. Полученное противоречие показывает, что целых чисел, удовлетворяющих условию, не существует.
*Ответ*: таких чисел не существует.

**2. Найдите все такие простые числа $p$ и $q$, для которых число $2^2 + p^2 + q^2$ также простое.**
*Примечание*. Простое число – это целое число больше единицы, которое делится только на единицу и на само себя.
*Решение*. Если числа $p$ и $q$ – нечетные, то число $2^2 + p^2 + q^2$ четное и, очевидно, больше 2, а потому не может быть простым. Итак, среди простых чисел $p$ и $q$ есть четное, которое равно 2. Предположим, что таковым является число $p$. Остается найти все простые $q$, для которых простым является число $q^2 + 8$.
Заметим, что если число не делится на 3, то есть дает при делении на 3 остаток 1 или 2, то квадрат этого числа дает от деления на 3 остаток 1, а потому если $q$ не делится на 3, то $q^2 + 8$ делится на 3, то есть число $q^2 + 8 > 3$ делится на 3 и не является простым. Таким образом, $q$ делится на 3, откуда $q = 3$. Аналогично, если $q = 2$, то $p = 3$. Остается подставить пары (2, 3) и (3, 2) в исходное выражение и убедиться, что обе действительно дают простое число 17.
*Ответ*: $p = 2$, $q = 3$ или $p = 3$, $q = 2$.

**3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ сторона $CD$ видна с середины стороны под прямым углом. Докажите, что $AD + BC \geq CD$.**
*Решение*. Обозначим середину стороны $AB$ через $O$, проведем лучи $AX$ и $BX$, которые параллельны соответственно прямым $OD$ и $OC$, которые пересекаются в точке $X$ (рис. 1). Понятно по построению, что $\Delta AXB$ – прямоугольный. Тогда $OD$ – срединный перпендикуляр к $AX$, а $OC$ – серединный перпендикуляр к $BX$, поэтому $AD = DX$, $XC = CB$ откуда $AD + BC = DX + XC \geq DC$, что и надо было доказать.

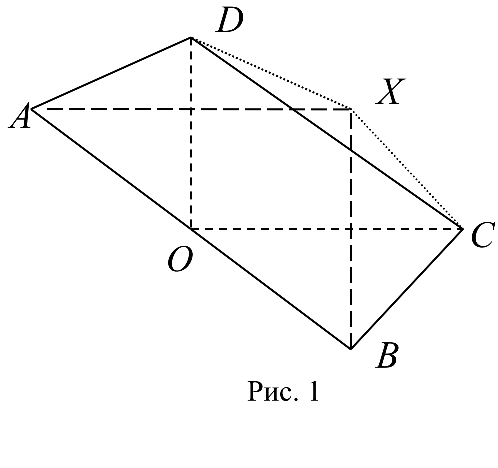

Рис. 1

**4. На равноплечных весах разложены гири весом 1, 2, 3, ..., *n*, *n* > 6 таким образом, что весы находятся в равновесии. Всегда ли можно снять 3 гири с весов таким образом, чтобы весы остались в равновесии?**

*Решение*. Если для некоторого $k > 1$ одна гиря $k$+1 расположена на первой чаше весов, а на второй – гири $k$ и 1, то достаточно снять эти 3 гири и требование выполнено. Если такая ситуация не выполняется, то рассмотрим ту чашу весов, где находится гиря 1, а также гиря, с наименьшим весом большим 1. Пусть этот вес $k$. Тогда на второй чаше находятся обязательно все гири массой $2, 3, ..., k-1$. На первой же обязательно находится гиря $k$ + 1. Если бы она находилась на второй чаше, то тогда можно снять с первой чаши гири 1 и $k$, со второй гирю $k$+1 и весы останутся в равновесии (первый случай). Заметим, что, $k < n$ иначе на одной чаше только две гири 1 и $n$, а на другой - все остальные, а они имеют больше вес: $2+3+...+n-1 > n+1$. Значит, гири разложены на чашках следующим образом: На первой – 1, $k$, $k$+1, …, на второй – $2, 3, ..., k-1$, … . Из этого очевидно, что $k > 3$, иначе равенства не будет. Но тогда на одной чашке находятся гири $2, k-1$, а на другой – гиря $k+1$, которые и можно снять.

*Ответ*: Всегда.

**5. Можно ли раскрасить все 2022 части круга (см. рис. 2) в три цвета так, чтобы никакие две части, окрашенные одинаково, не имели общей границы?**

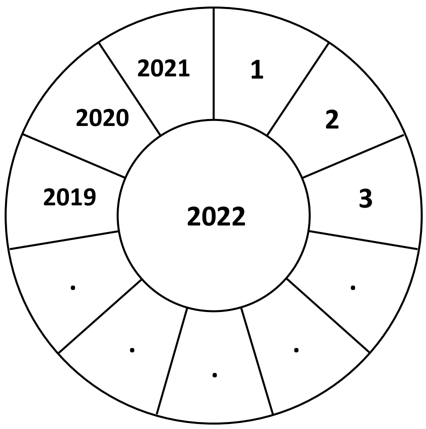


Рис. 2

*Решение*. Попробуем раскрасить рисунок в красный, зеленый и синий цвета. Центральный круг можно закрасить в любой из трех цветов. Покрасим его красным. Все 2021 секторов имеют общую границу с центральным кругом, а значит, ни один из них красить в красный цвет после этого нельзя.

Рассмотрим первый сектор. Его следует окрашивать либо в зеленый, либо в синий цвет. Покрасим его зеленым. Тогда второй сектор не может быть ни зеленым, ни красным, поэтому его нужно покрасить синим цветом. Теперь третий сектор не может быть синим и не может быть красным, значит, красим его зеленым и т. д. Получится так, что 2021-й сектор мы покрасим зеленым цветом. Но тогда соседние 1-й и 2021-й сектора будут иметь одинаковые цвета. Итак, раскрасить рисунок нужным образом не удастся.

*Ответ*: нельзя.