

**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
по математике
2022-2023 учебный год
8 класс
Максимальный балл – 35**

1. Есть лист клетчатой бумаги, сторона клеток равна 1. Рисовать можно только по линиям сетки. Нарисуйте: а) 20-угольник площади 9; б) 100-угольник площади 49.

Решение. См. рис. 1.

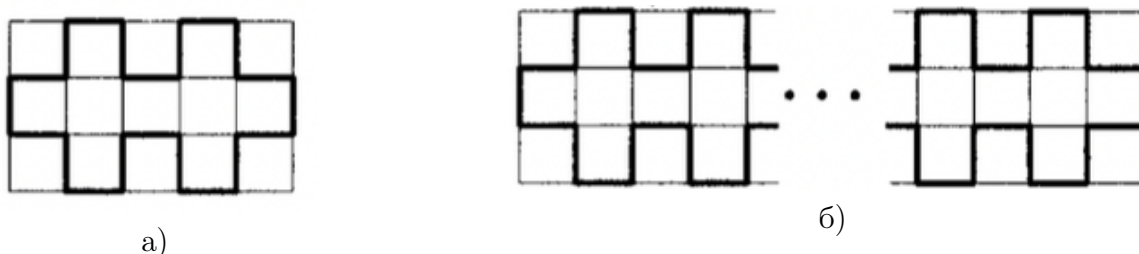


Рис. 1: Рисунок слева ответ к пункту а), вправа к пункту б).

В примере б) 12 вертикальных "палочек."

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Если картинка как в ответе на пункт б) и не сказано сколько "палочек" или сколько раз повторяется конструкция – снять 1 балл.

2. Маша пригласила к себе в гости трёх медвежат и тигрёнка решать математические задачи. После решения задач Маша пересчитала пироженки на кухне и заметила, что двух не хватает. У Маши есть чашечные весы без гирь, на чаши которых она может помещать пирожные, медвежат и тигрёнка. Все пирожные весят одинаково, все медвежата в момент прихода в гости – тоже. Также известно, что тигрёнок на диете и поэтому не мог съесть более одной пироженки. Как Маше за два взвешивания определить, кто съел пирожные?

Решение. Обозначи медвежат М1, М2, М3. Сначала сравним медвежат М1 и М2. Возможны два исхода.

1) Один из медвежат оказался тяжелее, например, $M1 > M2$. Тогда вторым взвешиванием сравним М1 и М3 + пирожное. Если $M1 < M3 + \text{пирожное}$, то М1 и М3 съели по пироженке. Если $M1 = M3 + \text{пирожное}$, то М1 и тигрёнок съели по пироженке. Если $M1 > M3 + \text{пирожное}$, то обе пироженки съел М1.

2) Веса медвежат оказались одинаковыми. Тогда вторым взвешиванием сравним М1 + пирожное и М3. Если $M1 + \text{пирожное} < M3$, то обе пироженки съел М3. Если $M1 + \text{пирожное} = M3$, то М3 и тигрёнок съели по пироженке. Если $M1 + \text{пирожное} > M3$, то М1 и М2 съели по пироженке.

Критерии. Полное решение – 7 баллов.

3. Найдите численное значение выражения

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{2}{ab + 1}$$

если известно, что a не равно b и сумма первых двух слагаемых равна третьему.

Ответ. 2.

Решение. Приведём к общему знаменателю условие

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} = \frac{2}{ab + 1},$$

получим

$$\frac{(a^2 + b^2 + 2)(ab + 1) - 2(a^2 + 1)(b^2 + 1)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(ab + 1)} = 0,$$

раскроем все скобки с числителе, приведем подобные, получим равенство $(a - b)^2(ab - 1) = 0$. Поскольку $a \neq b$, то $ab = 1$. Отсюда третье слагаемое равно 1, а тогда вся сумма равна 2.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Приведено правильно к общему знаменателю, приведены правильно все подобные, но без дальнейшего продвижения – 1 балл. Рассуждения по типу "если a взять таким, а b другим, то что-то получится" оценивается в 0 баллов.

4. В многоэтажную дробь

$$Д + \frac{1}{Р + \frac{1}{О + \frac{1}{Б + \frac{1}{Б}}}}$$

вместо букв подставили ненулевые цифры. Какой наименьший результат при этом получится? (Как обычно, разным буквам соответствуют разные цифры).

Ответ. $1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{2 + \frac{1}{8 + \frac{1}{3}}}} = 1\frac{53}{502}$.

Решение. Обозначим всю дробь T и запишем

$$T = Д + \frac{1}{X}, \quad X = Р + \frac{1}{Y}, \quad Y = О + \frac{1}{Z}, \quad Z = Б + \frac{1}{Б}.$$

Заметим, что все числа X, Y, Z больше 1, поэтому вторые слагаемые в первых трёх выражениях меньше 1. А если изменить в них первое слагаемое, то оно изменится минимум на 1, значит, и сумма изменится в ту же сторону (второе слагаемое может измениться меньше чем на 1 и не скомпенсирует изменение первого слагаемого). Поэтому T тем меньше, чем меньше $Д$, то есть следует взять $Д = 1$. Также T тем меньше, чем больше X , поэтому $Р$ должно быть максимально, то есть $Р = 9$. Число X тем больше, чем меньше Y , то есть чем меньше $О$. Значит, $О = 2$. При этом Y тем меньше, чем больше Z . Максимальное Z достигается при максимальном $Б = 8$ и минимальном $Б = 3$, откуда получаем ответ.

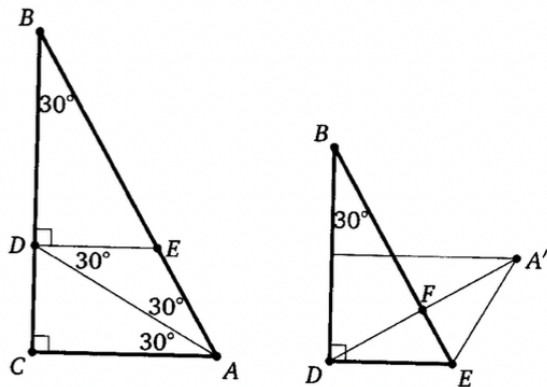
Критерии. Полное решение – 7 баллов. За правильный ответ без обоснования – 2 балла.

5. После темы «треугольники» всем ученикам выдали бумажные треугольники и ножницы для решения очередной задачи. Непослушный Вася, не слыша учителя сделал следующее:

согнул свой треугольник по прямой, сделал ножницами прямой разрез, получил три части, согнутые разогнул. Вася побежал к учителю и сказал: «Все три части оказались равными неравносторонними треугольниками». Могут ли слова Васи быть правдой?

Ответ. Да, могут.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC , в котором $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$. Проведем его биссектрису AD и перпендикуляр DE к катету BC (см. рис. левый). Перегнём треугольник по прямой DE , тогда точка A займёт положение A' , после чего сделаем разрез по прямой DA' (см. рис. правый).



При таком разрезании и последующем разгибании образуются три треугольника: ACD , AFD и BFD , где F – точка пересечения прямых DA' и AB . Докажем, что эти треугольники равны. Для этого достаточно доказать, что $DF \perp AB$, так как в этом случае равенство треугольников ACD и AFD будет следовать из их симметрии относительно биссектрисы AD , а равенство треугольников AFD и BFD – из равенства соответствующих острых углов и наличия общей стороны DF .

Так как $DE \parallel CA$, то $\angle DEF = \angle CAB = 60^\circ$, $\angle ADE = \angle CAD = 30^\circ$, значит, $\angle AFD = 90^\circ$, что и требовалось.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Если не доказано равенство треугольников ACD , AFD и BFD – 3 балла. Не верно доказано какое-то равенство треугольников, а другие верно – снять 2 балла.