

**Олимпиадные задачи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников  
по МАТЕМАТИКЕ (2022 - 2023 уч. год)**

**8 класс**

1. Жители страны Сказок пригласили на свой праздник в качестве почетных гостей Бабу-Ягу, Кощею и Змее Горыныча. Жителям стало известно следующее. Если на праздник придет Баба-Яга, то не придет Кощей. Если придет Кощей, то не придет Змей Горыныч. Если придет Змей Горыныч, то не придет Баба Яга. А также, что хотя бы один из почетных гостей будет присутствовать на празднике. Докажите, что тогда ровно один из почетных гостей будет присутствовать на празднике.

**Решение**

Условие «Если на праздник придет Баба-Яга, то не придет Кощей» равносильно утверждению, что на праздник пришли и Баба-Яга и Кощей – невозможное событие.

По аналогичным условиям невозможным является, что на праздник пришли и Кощей и Змей Горыныч, или и Змей Горыныч и Баба Яга. Значит, по крайней мере, двое из гостей не придут на праздник. Поскольку по условию хотя бы один придет, то все трое отсутствовать на празднике не могут. Значит, будет ровно один гость.

**Критерий оценивания**

Обосновано, что присутствие любых двух гостей является невозможным событием – 4 балла.

Из выше указанного утверждения сделан вывод о том, что возможными случаями являются:

- 1) ровно один гость на празднике;
- 2) ни одного гостя на празднике.

И второй случай отклонен по условию «хотя бы один из почетных гостей будет присутствовать на празднике» - добавляется еще три балла.

Таким образом, верное и полностью обоснованное решение оценивается в 7 баллов.

2. В некотором государстве есть монеты достоинством рубль, три рубля и пять рублей. Можно ли в этом государстве выдать заработную плату в 200 рублей тринадцатью монетами? Ответ обоснуйте.

**Решение**

Пусть  $x$ ,  $y$ ,  $z$  количество монет достоинством рубль, три рубля и пять рублей соответственно. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 13, \\ x + 3y + 5z = 200. \end{cases}$$

Из системы получаем уравнение, которое не имеет решений в целых числах  $2y+4z=187$ . Поэтому ответ в задаче отрицательный.

**Критерии оценивания**

Только верный ответ – 0 баллов.

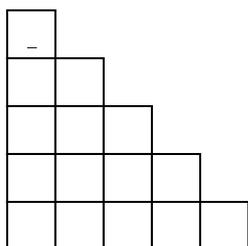
Верно составлена система, но дальнейших продвижений в решении нет - 3 балл.

Получено, но не решено, уравнение в целых числах - 4 балла.

Есть продвижения в доказательстве того, что уравнение не имеет решений в целых числах - 5-6 баллов.

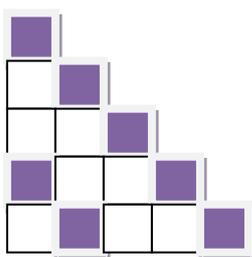
Верно решенная задача – 7 баллов.

3. Можно ли фигуру, изображенную на рисунке, замостить без наложений и просветов полосками  $1 \times 3$ ? Ответ объяснить.



**Решение**

Введем раскраску как на рисунке.



Каждая полоска  $1 \times 3$  накрывает ровно одну закрашенную клетку. Поскольку для замощения доски требуется 5 полосок, то закрашенных клеток должно быть ровно 5, а их 7. Поэтому нельзя.

**Критерии оценивания**

Только верный ответ – 0 баллов.

Предложена раскраска, с помощью которой можно доказать, что заданную фигуру заданными полосками замостить нельзя, но отсутствует объяснение этому или объяснение не является исчерпывающим – 5 баллов.

Верно решенная задача – 7 баллов.

4. Известно, что сумма квадратов двух натуральных чисел делится на 7. Верно ли, что их произведение делится на 49? Ответ обоснуйте.

**Решение**

Рассмотрим множество остатков от деления натурального числа на 7:  $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ . Следовательно, множество остатков от деления квадрата натурального числа на 7 состоит из чисел  $\{0,1,2,4\}$ . Исходя из полученного множества остатков, сумма квадратов натуральных чисел будет делиться на 7 тогда, когда каждое из них делится на 7. Таким образом, верно, что произведение чисел будет делиться на 49.

**Критерии оценивания**

Только приведен пример - 0 баллов.

Доказано, что если каждое из чисел делится на 7, то произведение этих чисел делится на 49 - 1 балл.

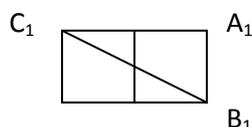
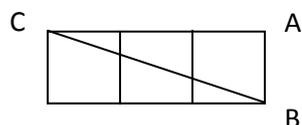
Упущены некоторые случаи в работе с остатками, но идея решения прослеживается - 3 балла.

Допущена вычислительная ошибка, грубо влияющая на доказательство и приводящая к неверным промежуточным выводам, но все случаи работы с остатками рассмотрены - 4 балла.

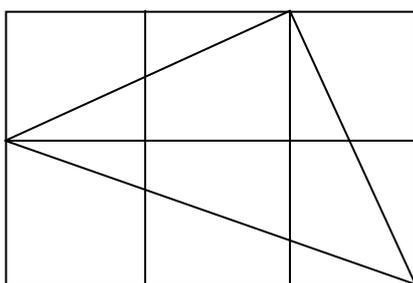
Допущена вычислительная ошибка, незначительно влияющая на доказательство и не приводящая к неверным промежуточным выводам, но все случаи работы с остатками рассмотрены - 5-6 баллов (в зависимости от полноты рассуждений)

Верное и полное решение задачи - 7 баллов.

5. На клетчатой бумаге нарисованы два прямоугольных треугольника. Найдите сумму углов  $\angle BSA$  и  $\angle B_1C_1A_1$ .



**Решение**



На основе полученного чертежа доказать, что сумма углов равна  $45^\circ$ .

**Критерии оценивания**

Только верный ответ – 0 баллов.

Получен неверный ответ из-за ошибки в рассуждениях от 1-4 баллов в зависимости от продвижения в решении.

На основе правильных рассуждений обоснованно получен верный ответ - 7 баллов.