ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
2022-2023 учебный год. Камчатский край
возрастная группа 8 класс
Максимальное количество баллов 35

8.1. Можно ли расставить по кругу числа от 1 до 2022 так, чтобы каждое делилось на разность своих соседей?

Решение. Нельзя, так как нечётное не может делиться на чётное, тогда нечётные числа должны стоять парами, но нечётных чисел всего 1011, поэтому такая расстановка невозможна.
Ответ: нельзя.
Критерии:
7 баллов - полное решение;
3 балла - подмечено, что нечётные числа должны стоять парами, дальнейшее продвижение отсутствует;
1 балл - подмечено, что рядом с нечётным стоят числа разной чётности или, что от 1 до 2022 всего 1011 нечётных чисел.

8.2. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC и пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB,
если $BM = 10$, $KC = 2$.

Решение. Пусть точка K расположена на стороне BC треугольника ABC. Треугольники ABK и MBC – равнобедренные (биссектриса, проведённая из вершины B, является высотой), поэтому $AB = BK = BC – CK = 10 –2= 8$.
Если точка K расположена на продолжении отрезка BC за точку C, то аналогично находим, что $AB = 12$.
Ответ: 8 или 12.
Критерии:
7 баллов – рассмотрены все случаи, решение полное;
4 балла – рассмотрен только 1 случай;
2 балла – получен вывод, о том, что треугольники равнобедренные, дальнейшее продвижение отсутствует.

8.3. Двое пишут 36-значное число, употребляя только цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Первую цифру пишет первый, вторую – второй, третью – первый и т. д. Может ли второй добиться того, чтобы полученное число разделилось на 9, если первый стремится ему помешать?

Решение. Стратегия второго: писать цифру так, чтобы сумма её с предыдущей цифрой равнялась 8 . Поскольку $18·8$ делится на 9, то полученное 36-значное число будет делиться на 9.

Ответ: Может.

Критерии:

7 баллов - полное решение;

3 балла - подмечено, что после хода первого любое слагаемое можно добавить до 8;

1 балл - подмечено, что после хода первого можно добавить до 9 любое число, кроме 1, значит, стратегия второго добавления до 9 не работает.

8.4. Петя выписал строку из трёх положительных чисел, под ней — строку из их попарных сумм, а под ней — строку из попарных произведений чисел второй строки. Числа третьей строки совпали (в каком-то порядке) с числами первой строки. Найдите эти числа.

Решение. Пусть Петя выписал числа $a \le b \le c$, тогда числа третьей строки равны $(a+b)(a+c) \le (a+b)(b+c) \le (a+c)(b+c)$. Следовательно, $a = (a+b)(a+c)$, $b = (a+b)(b+c)$. Сложив эти равенства, получаем $a + b = (a + b)(a + b + 2c)$, откуда $a + b + 2c = 1$.

Аналогично $a+2b+c=1$, $2a+b+c=1$, откуда $a = b = c = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$.

Критерии:

7 баллов – полное решение;

3 балла – получены уравнения $a+2b+c=1$, $2a+b+c=1$, $a + b + 2c = 1$, дальнейшее продвижение отсутствует;

2 балла – записан ответ, проверено условие, но не доказано, что других чисел нет;

1 балл – записан только ответ.

8.5. Девять гномов трижды становились по одному в клетки квадрата 3×3, и каждый раз гномы, оказавшиеся в соседних по стороне клетках, здоровались. Докажите, что какие-то два гнома так и не поздоровались.

Решение. Рассмотрим шахматную раскраску квадрата. Заметим, что каждый раз здороваются гномы, стоящие на полях разного цвета.

Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. В первый раз на каком-то цвете стояли не менее 5 гномов, они между собой не здоровались. Из них второй раз не менее трёх стояли на одном цвете и не здоровались. Из этих гномов в третий раз какие-то два стояли на одном цвете и не здоровались.

Второй способ. Разобьём гномов на 8 групп: ЧЧЧ, ЧЧБ,…, БББ (в группу ЧЧБ входят гномы, которые в первые два раза стояли на чёрных полях, а третий раз — на белом). Гномов больше, чем групп, поэтому в какой-то группе есть не меньше двух гномов. Они и не здоровались.

Критерии:

7 баллов – полное верное доказательство;

2 балла – в рассуждениях используется метод раскраски и отмечено, что не здороваются гномы, стоящие на клетках одного цвета;

1 балл – незначительное продвижение (например, вычислено сколько всего могло быть рукопожатий, если бы каждый поздоровался с каждым)

0 баллов – рассмотрен частный случай расстановки гномов; отсутствует продвижение логически обоснованное