РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 8 КЛАССА

Задача 1. *Сумма цифр четырёхзначного числа равна 8, первая слева его цифра получается из второй умножением на 3, а четвёртая из третьей — умножением на 4. Найдите все такие числа.*

Ответ. 6200. ***Решение.*** Покажем, что других таких чисел нет. Первая цифра не может быть нулём, поэтому вторая цифра не меньше 1, а первая — не меньше 3. Если третья цифра больше 0, то четвёртая не меньше 4, и получается, что сумма цифр числа не меньше, чем 3+1+1+4 = 9 — противоречие. Поэтому третья и четвёртая цифры — нули, а первая и вторая должны в сумме давать 8. Значит, вторая цифра равна 2, а первая равна 6.

• За нахождение числа 6200 — *4 балла*. *Из оставшихся 3 баллов* оценивается обоснование его единственности.

Задача 2. *Возвращаясь домой, охотник сначала шёл по болоту со скоростью 2 км/ч, потом — по лесу со скоростью 4 км/ч, а затем — по шоссе со скоростью 6 км/ч. За 4 часа он прошел 15 километров. На что он потратил больше времени — на ходьбу по болоту или ходьбу по шоссе?*

Ответ. На ходьбу по болоту. ***Решение.*** Пусть по болоту охотник шёл a часов, по лесу — b часов, а по шоссе — c часов. За 4 часа он прошел

$$2a+4b+6c = 4(a+b+c)+2(c-a) = 4\cdot4+2(c-a) = 15 \text{ километров.}$$

Получается, что $2(c-a) = -1$, откуда $c < a$.

• За верный ответ без всякого обоснования — *0 баллов*. За верный ответ с конкретным числовым примером, удовлетворяющим условиям задачи, при отсутствии общего обоснования — *2 балла*.

Задача 3. *Можно ли расставить в таблице 6x6 положительные числа (не обязательно целые) так, чтобы произведение всех чисел в любой строке, любом столбце и любом квадрате 2x2 равнялось двум?*

Ответ. Нельзя. ***Решение.*** Допустим, так расставить числа удалось. Так как таблицу можно разбить на 6 строк, то произведение всех чисел в ней должно равняться 2^6. С другой стороны, таблицу можно разбить на 9 квадратов 2x2, и потому произведение всех чисел в ней должно равняться 2^9. Противоречие.

• За верный ответ без всякого обоснования — *0 баллов*.

Задача 4. *Медиана, проведенная из вершины B треугольника ABC, короче половины стороны AB и половины стороны BC. Докажите, что угол ABC больше 120 градусов.*

Первое решение. Пусть D — середина стороны AC, а E — середина стороны BC. По условию $BD < BE = BC/2$ и $BD < DE = AB/2$ (по свойству средней линии). Значит, BD — наименьшая сторона треугольника BDE, а угол BED — наименьший угол в этом треугольнике. Следовательно, $\angle BED < 60°$ (равняться 60° он не может, так как тогда треугольник BDE был бы равносторонним, что противоречит неравенству $BD < BE$), откуда $\angle ABC = \angle ABD+\angle CBD = \angle BDE+\angle CBD = 180°-\angle BED > 180°-60° = 120°$, что и требовалось доказать. Равенство $\angle ABD = \angle BDE$ здесь вытекает из параллельности средней линии DE треугольника ABC его стороне AB. ***Второе решение.*** Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCF$. Его диагональ BF равна удвоенной медиане BD треугольника ABC. Значит, BF короче как отрезка AB, так и отрезка $AF = BC$, то есть сторона BF в треугольнике ABF — наименьшая. Следовательно, $\angle BAF < 60°$, откуда $\angle ABC = 180°-\angle BAF > 120°$.

• За идею провести среднюю линию из основания медианы BD или удвоить медиану BD без дальнейшего содержательного продвижения — *1 балл*.

Задача 5. *Существуют ли такие 100 различных натуральных чисел, что произведение любых пятидесяти двух из них делится на произведение остальных сорока восьми?*

Ответ. Существуют. ***Первое решение.*** Подойдут числа 100!, 100!/2, …, 100!/100. Произведение любых 52-х из них делится на $(100!)^{51}$, а произведение любых 48-ми является делителем числа $(100!)^{48}$, а, значит, и числа $(100!)^{51}$. ***Второе решение.*** Подойдут числа 2^n, 2^{n+1}, …, 2^{n+99}, где $n \geq 575$. Произведение любых 52-х из них — двойки, не меньшая, чем $2^{n+(n+1)+\ldots+(n+51)} = 2^{52n+51\cdot52/2}$, а произведение любых 48-

ми — степень двойки, не большая, чем $2^{(n+52)+\ldots+(n+99)} = 2^{48n+151\cdot 48/2}$. Решая неравенство $52n+51\cdot 52/2 > 48n+151\cdot 48/2$, получаем $n > 574{,}5$, откуда и вытекает утверждение, сделанное в начале решения, так как любая степень двойки делится на любую меньшую степень двойки.

♦ См. также задачу 5 для 6 класса.

• За ответ «существуют» без обоснования — *0 баллов*. Верный пример без обоснования его правильности — *4 балла*. Идея использовать степени одного числа, не увенчавшаяся построением верного примера — *не более 2 баллов*.