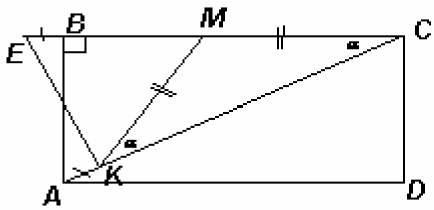
8 класс

1. В строку выписано 5 последовательных натуральных чисел. Возможно ли, что сумма цифр первого числа равна 52, а пятого — 20? (Если такое возможно, то приведите пример таких чисел, если невозможно, то объясните, почему это невозможно)
   Ответ: возможно.
   Решение. Пример 889999, …, 890003.

2. Сорока-ворона кашу варила, деток кормила. Третьему птенцу досталось столько же каши, сколько первым двум вместе взятым. Четвёртому – столько же, сколько второму и третьему. Пятому – столько же, сколько третьему и четвёртому. Шестому – столько же, сколько четвёртому и пятому. А седьмому не досталось – каша кончилась! Известно, что пятый птенец получил 10 г каши. Сколько каши сварила сорока-ворона?
   Ответ: 40 г.
   Решение. Пусть первый птенец получил a граммов каши, второй – b граммов, Тогда остальные получили a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, 0 граммов соответственно. Всего они получили 8a+12b граммов каши, что в 4 раза больше, чем получил пятый.

3. Петя и Вася играют в следующую игру. У Пети имеется 100 карточек, на которых по одному разу написаны числа от 1 до 100. Каждым ходом Петя выкладывает на стол две карточки, после чего Вася тут же забирает одну из них. После 50 ходов у Пети карточки закончатся, а на столе останется лежать 50 карточек. Цель Пети — сделать так, чтобы сумма чисел на этих 50 карточках оказалась четной. Может ли Вася ему помешать?
   Ответ: может.
   Решение. Пусть Петя выложил x пар типа четное-четное, y пар типа нечетное-нечетное, тогда пар типа четное-нечетное он выложил 50-x-y. Четных чисел получается 2x + (50-x-y)=50+x-y, а нечетных 50-x+y. Так как четных и нечетных по 50, то получаем, что x=y, а пар с разной четностью 50-2x – четное количество.
   Чтобы Васе помешать Пете, ему надо из пар с разной четностью попеременно брать то четное, то нечетное число. Тогда он заберет x+(50-2x)/2 = 25 нечетных чисел (и столько же четных), и на столе останется 25 четных и 25 нечетных чисел.

4. В прямоугольнике $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K так, что $CK = BC$. На стороне BC отмечена точка M так, что $KM = CM$. Докажите, что $AK + BM = CM$.
   Решение. На продолжении стороны BC за точку B отметим такую точку E, что $BE = AK$, тогда $CE = CB + BE = CK + KA = CA$ (см. рис.).
   Треугольники EKC и ABC равны по двум сторонам и общему углу между ними. Следовательно, $\angle EKC = \angle ABC = 90°$. Пусть $\angle KCM = \angle MKC = \alpha$, тогда $\angle MKE = 90° - \alpha = \angle MEK$, значит, $ME = MK = MC$. Таким образом, $AK + BM = BE + BM = ME = CM$.



5. Среди чисел от 1 до 10^{23} каких больше — с двузначной суммой цифр или с трехзначной?
   Ответ: с трехзначной.
   Решение. Число 10^{23} имеет сумму цифр 1, так что его не будем рассматривать.
   Будем записывать числа как 23-значные, добавив ведущие нули. Будем называть цифры “парными”, если их сумма равна 9. Каждому числу с двузначной суммой цифр поставим в соответствие число, заменив каждую цифру на “парную”. Каждому числу в итоге будет поставлено в пару свое уникальное число. Если сумма цифр у числа была x, то у числа к нему в паре она будет равна 9*23-x=207-x≥207-99=108, и при этом не более 9*23, то есть является трехзначным числом. То есть чисел с трехзначной суммой цифр не меньше, чем с двузначной. Но есть еще, например, число 99…99 (23 девятки), которое не поставленно никакому числу в пару.