Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2022/23 уч.г.
Математика, 8 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

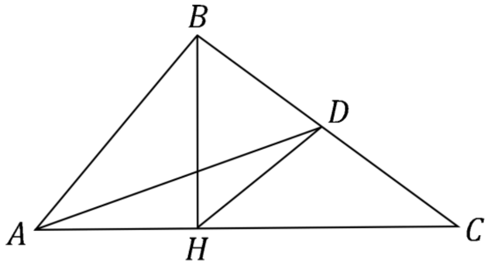
***Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям**

8.1. Можно ли разрезать куб на 71 кубик (любых ненулевых размеров)?
Ответ. Можно.
Решение. Поделим каждое ребро куба пополам и разрежем куб на 8 кубиков. Теперь возьмём один кубик и поделим его на 8 маленьких кубиков, один кубик исчез, но возникло 8 новых, общее число частей увеличилось на $8-1=7$ и стало равным 15. Повторяя эту операцию, получим $15+7=22$, $22+7=29$, $29+7=36$, $36+7=43$, $43+7=50$, $50+7=57$, $57+7=64$, $64+7=71$ часть.
Комментарий. *Верный ответ без обоснования (без приведенного примера) – 0 баллов. Обоснование в виде любого верного примера – 7 баллов.*

8.2. Два велосипедиста, Андрей и Борис, едут с постоянной одинаковой скоростью по прямому шоссе в одну сторону, так что расстояние между ними постоянно. Впереди есть сворот в деревню. В некоторый момент времени расстояние от Андрея до сворота было равно квадрату расстояния от Бориса до этого же сворота. А когда каждый из них проехал еще 1 км, расстояние от Андрея до сворота стало в 3 раза больше, чем от Бориса до сворота. Чему равно расстояние между велосипедистами?
Ответ. 2 или 0 км.
Решение. Обозначим первые упомянутые расстояния a и b, тогда $a=b^2$. Когда каждый из них проехал еще километр, до сворота осталось соответственно $a-1$ и $b-1$ км, поэтому $a-1=3(b-1)$, то есть $b^2-1=3(b-1)$, $(b-1)(b+1)=3(b-1)$, откуда $b=1$ или $b=2$. При $b=1$ имеем $a=1$, откуда $a-b=0$. При $b=2$ имеем $a=4$, откуда $a-b=2$.
Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Верно составлены оба уравнения, но ответ не получен – 3 балла. Ответ получен подбором чисел, удовлетворяющих условию, но не показано, что другие ответы невозможны – 2 балла, если подбором найдена только часть ответа –1 балл. Решение верно начато, но нет существенного продвижения – 1 балл. При верном ходе решения допущены ошибки в преобразованиях – снимать 2 балла за ошибку. Приведен только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

8.3. В треугольнике ABC с углом C, равным 30°, проведена медиана AD. Угол ADB равен 45°. Найдите угол BAD.

Ответ. 30°.



Решение. Проведём высоту BH (см. рисунок). В прямоугольном треугольнике BHC катет BH лежит против угла 30°, то есть $BH = \frac{BC}{2} = BD$. Угол HBC равен $180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Треугольник BHD – равнобедренный с углом 60°, то есть равносторонний, и $BH = BD = HD$. Найдем углы треугольника ADH: $\angle ADH = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$; $\angle AHD = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$; $\angle DAH = 180^\circ - 150^\circ - 15^\circ = 15^\circ$. Значит, $AH = HD$. Но тогда $AH = BH$, и треугольник ABH равнобедренный. Поскольку он прямоугольный, $\angle BAH = 45^\circ$. Тогда $\angle BAD = \angle BAH - \angle DAH = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном решении имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы – 5-6 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2-3 балла. Приведен только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

8.4. Известно, что для действительных чисел a и b выполняются равенства:

$$a^3 - 3ab^2 = 11,\ b^3 - 3a^2b = 2.$$

Какие значения может принимать выражение $a^2 + b^2$?

Ответ. 5.

Решение. Имеем

$$(a^2+b^2)^3 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = (a^3 - 3ab^2)^2 + (b^3 - 3a^2b)^2 = 11^2 + 2^2 = 125.$$

Отсюда $a^2 + b^2 = 5$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Верный ответ получен на основе простого примера, удовлетворяющего условию (a=-1, b=2), но не доказано, что для других пар такой же ответ – 3 балла. Есть некоторое продвижение – 2 балла. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Приведен только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

8.5. Какое максимальное число членов может быть в последовательности ненулевых целых чисел, для которых сумма любых семи последовательных чисел положительна, а сумма любых одиннадцати последовательных чисел отрицательна?

Ответ. 16.

Решение. *Оценка.* Предположим, чисел не меньше 17. Составим таблицу из 7 столбцов и 11 строк, в которой расположены первые 17 чисел.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}

Рассмотрим суммы по строкам:

$$a_1 + \ldots + a_7,\quad \ldots,\quad a_2 + \ldots + a_8,\quad a_{11} + \ldots + a_{17}.$$

Все эти суммы положительны, значит, и сумма всех записанных чисел положительна. Но если просуммировать по столбцам, получим отрицательные суммы. Полученное противоречие показывает, что чисел в последовательности должно быть меньше 17.

Пример. 16 чисел может быть: $-5, -5, 13, -5, -5, -5, 13, -5, -5, 13, -5, -5, -5, 13, -5, -5$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Верно получена оценка – 5 баллов, построен верный пример – 2 балла, баллы суммируются. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*