Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2022-2023 уч.год

8 класс

Решения и ответы

1. Докажите, что для любых натуральных x и y число $2022x^2+349x+72xy+12y+2$ является составным.
   Решение.
   $2022x^2+349x+72xy+12y+2=\underline{6\cdot 337x^2}+337x+\underline{12x}+\underline{6\cdot 12xy}+12y+2=6x\cdot(337x+12y+2)+337x+12y+2=(6x+1)(337x+12y+2)$. Так как x и y натуральные, то обе скобки больше 1. Следовательно число – составное.

2. Если взять три разные цифры, составить из них все шесть возможных двузначных чисел, записанных двумя разными цифрами, и сложить эти числа, то получится 462. Найдите эти цифры. Приведите все варианты и докажите, что других нет.

   Решение. Пусть эти три цифры обозначены a, b, c. Получаем шесть чисел $10a+b, 10b+a, 10c+b, 10b+c, 10a+c, 10c+a$. Сумма этих чисел равна $22(a+b+c)$. По условию, $a+b+c=462:22=21$. Подбором находим наборы цифр $(6,7,8)$, $(4,8,9)$, $(5,7,9)$. Эти наборы могут быть получены, например, перебором по наибольшей цифре. Выберем цифру 9. Сумма двух оставшихся цифр равна 12. С учетом того, что цифры разные, получаем наборы $(4,8,9)$, $(5,7,9)$. Если уменьшить наибольшую цифру на 1, сумма двух других цифр станет равной 13. Получаем единственный такой набор $(6,7,8)$. Уменьшить наибольшую цифру до 7 уже не получится.
   Ответ. $(6,7,8)$, $(4,8,9)$, $(5,7,9)$.

3. Петя говорит, что на пути из дома в школу он половину пути шел со скоростью 4 км/час, а половину времени – со скоростью 5 км/час. Может ли рассказ Пети оказаться верным? Приведите пример или докажите, что этого не может быть.

   Решение: Пусть S – путь, который прошел Петя, T – полное время, за которое он прошел весь путь S. Рассмотрим первое утверждение Пети. Из условия следует, что Петя шел со скоростью 4 км/час не больше половины времени. Время, за которое Петя прошел половину пути, равно $\dfrac{S}{2\cdot 4}$. Отсюда $\dfrac{S}{4\cdot 2}\le\dfrac{T}{2}$, то есть $S\le 4T$.
   Рассмотрим второе утверждение Пети. Из условия следует, что со скоростью 5 км/час Петя шел не больше половины пути. То есть $5\cdot\frac{T}{2}\le\frac{S}{2}$ и $5T\le S$.
   Из этих неравенств получаем $5T\le S\le 4T$, что невозможно, так как $T>0$.

   Ответ: Утверждение неверно.

4. Чайный сервиз состоит из шести одинаковых чашек и шести одинаковых блюдец. Шесть разных сервизов упаковали в две коробки, в одну – все блюдца, в другую – все чашки. Все предметы завернуты в непрозрачную бумагу, на ощупь они неразличимы. Найдите минимальное число предметов, которое нужно вынуть из этих коробок, чтобы гарантированно получить хотя бы одну пару, состоящую из чашки и блюдца из одного сервиза. Обоснуйте свой ответ. (*Вы знаете, в какой коробке лежат чашки, в какой коробке - блюдца.*)

   Решение. Поясненим на примере. 18 чашек и 12 блюдец может не хватить. Пронумеруем сервизы. Взяв наудачу 18 чашек, можем получить все чашки из сервизов №1, 2, 3.

Взяв наудачу 12 блюдец, можем получить все блюдца из сервизов №5, 6. Пару чашка-блюдце составить нельзя. Добавим к этому набору еще одно блюдце. Единственный вариант, при котором по прежнему нельзя составить пару, это вынуть тринадцатым блюдце, входящее в сервиз №4.

Общее доказательство. n взятых чашек и $30-n$ взятых блюдец могут оказаться из разных сервизов ($n>0$). Пусть взятые чашки полностью занимают k сервизов, и взяты еще r чашек из какого-то одного сервиза. Тогда $n=6k+r$, $30-n=30-6k-r=6(4-k)+(6-r)$, здесь блюдца тоже занимают $4-k$ сервизов полностью и еще остается $6-r$ блюдец. Может оказаться, что сервизы, занятые чашками и блюдцами, не пересекаются, и таких сервизов суммарно 4. Оставшиеся взятые чашки и блюдца могут оказаться из разных сервизов, остатки от деления на 6 это позволяют. Далее, добавление 31-го предмета может не позволить составить пару чашка-блюдце, так как новый предмет входит в уже встретившийся незаполненный сервиз, или 30 чашек и блюдец группируются по 6 и относятся к разным сервизам.

Теперь покажем, что 32 предмета позволяют составить пару. Возьмем 31 чашку. Так как чашек больше 30, то имеем по крайней мере по одной чашке из каждого сервиза. Любое взятое блюдце позволит составить пару. *Ответ.* 32 предмета.

5. В треугольнике ABC AM и CN – биссектрисы. Точка X выбрана на биссектрисе AM так, что расстояние BX – наименьшее из возможных. Точка Y выбрана на биссектрисе CN так, что расстояние BY – наименьшее из возможных. Докажите, что прямые AC и XY параллельны.

Решение. Из условия сразу получаем, что BX и BY – перпендикуляры, проведенные к биссектрисам. Продолжим эти перпендикуляры до пересечения с прямой AC в точках F и E соответственно. В треугольнике ABF отрезок AX является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABF – равнобедренный, при этом $AB=AF$. Получаем, что X – середина BF. Точно так же в треугольнике BCE отрезок CY является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник BCE – равнобедренный, при этом $BC=CE$. Получаем, что Y – середина BE. Итак, отрезок XY – это средняя линия треугольника BFE. Поэтому прямые AC и XY параллельны.

Решение не изменится, если треугольник ABC равнобедренный.