8 класс

8.1. Учащиеся школы отправились на экскурсию на шести автобусах. В автобусах было не обязательно равное количество школьников, но в среднем в каждом автобусе было 28 школьников. Когда первый автобус доехал до пункта назначения, в автобусах, продолжавших движение, среднее количество школьников стало равным 26. Сколько школьников ехало в первом автобусе?

Ответ. 38.

Решение. Суммарное количество школьников изначально было равно 28·6=168. После того, как первый автобус закончил поездку, осталось 26·5=130 школьников. Значит, в первом автобусе было 168–130=38 школьников.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

8.2. В рабочие дни (с понедельника по пятницу) Петя пять раз занимался в тренажерном зале. Известно, что суммарно он провел в зале 135 минут, при этом время, проведенное в зале в любые два разных дня, отличалось, по крайней мере, на 7 минут. Какую наибольшую продолжительность могло составлять самое короткое занятие?

Ответ. 13 минут.

Решение. Обозначим минимальное время тренировки за x минут, тогда вторая (по продолжительности) не меньше, чем $x+7$, третья не меньше, чем $x+14$, четвертая не меньше, чем $x+21$, пятая не меньше, чем $x+28$. Тогда суммарно тренировки длятся не менее чем $5x+70$ минут.
Решая неравенство $135 \geq 5x+70$, получаем $x \leq 13$. Подходит продолжительность тренировок в 13, 20, 27, 34 и 41 минута.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что самое короткое занятие не может длиться более 13 минут – 5 баллов.
Приведен пример – 2 балла.

8.3. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 25×25 на клетчатые прямоугольники такие, что периметр каждого из них равен 18?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что такое разрезание возможно. Так как периметр прямоугольника равен 18, то сумма длины и ширины равна 9. Это означает, что одна из этих величин – четное число, а другая – нечетное. Поэтому площадь каждого прямоугольника разрезания будет четным числом. Значит, и сумма площадей прямоугольников разрезания также будет четным числом. Но эта сумма должна равняться площади квадрата со стороной 25, то есть числу нечетному. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

8.4. Дан треугольник *ABC*. Вне треугольника *ABC* выбраны точки *D*, *E*, *F* так, что *AD* = *DB*, *BE* = *EC*, *CF* = *FA*. Докажите, что прямые, содержащие биссектрисы углов *ADB*, *BEC* и *CFA*, пересекаются в одной точке.

Первое решение. Из условия следует, что треугольник ADB – равнобедренный, поэтому биссектриса DM угла ADB является, одновременно, медианой и высотой этого треугольника. Так же и биссектриса EN угла BEC является медианой и высотой треугольника BEC. Рассмотрим точку O пересечения прямых, содержащих биссектрисы углов ADB и BEC. В треугольнике AOB отрезок OM является одновременно медианой и высотой. Поэтому $AO = OB$. А из того, что точка O лежит на прямой EN, аналогично следует, что $OB = OC$. Мы получили равенство $OC = AO$, то есть равенство треугольников CFO и AFO по третьему признаку, из которого следует, что точка O лежит также и на биссектрисе угла CFA. Утверждение доказано.
Второе решение. Из условия следует, что треугольник ADB – равнобедренный, поэтому биссектриса угла ADB является, одновременно, его медианой и высотой. Тогда прямая, содержащая эту биссектрису, является серединным перпендикуляром к отрезку AB. Аналогично две другие прямые из условия задачи являются серединными перпендикулярами: одна к стороне BC, другая – к стороне CA треугольника ABC. А серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке – центре окружности, описанной около треугольника ABC.

8.5. По кругу выписано 101 число. Известно, что среди любых пяти подряд идущих чисел найдутся хотя бы два положительных числа. Какое наименьшее количество положительных чисел может быть среди этих 101 выписанного числа?

Ответ. 41.

Решение. Рассмотрим любые 5 подряд идущих чисел. Среди них есть положительное. Зафиксируем его, а остальные 100 разобьем на 20 пятерок подряд идущих. В каждой такой пятерке будет не менее двух положительных чисел. Таким образом, общее количество положительных чисел не менее $1+2\cdot 20=41$. Такая ситуация возможна. Занумеруем числа по кругу. Положительными можно взять числа с номерами 1, 3, 6, 8, 11, …, 98, 101.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что положительных чисел не меньше 41 – 5 баллов.
Приведен пример с 41 положительным числом – 2 балла.