ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП 8 КЛАСС

Решения и критерии оценивания

Общее максимальное количество баллов за задания олимпиады – 35 баллов. Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

1. Однажды Алиса оказалась в сказочном лесу, где жили два удивительных брата-близнеца, Траляля и Труляля. Траляля всегда лгал по понедельникам, вторникам и средам, но зато говорил только правду все остальные дни недели. Труляля всегда лгал по четвергам, пятницам и субботам, но говорил только правду все остальные дни недели. В один из дней Алиса встретила обоих братьев (отличить внешне кто из них кто было невозможно), которые заявили:
Первый: «Я лгу по субботам»
Второй: «Я буду лгать завтра»
Первый: «А еще я лгу по воскресеньям»
Определите, в какой день недели могла произойти эта встреча?
Ответ: только в среду.
Решение. Утверждение «я лгу по воскресеньям» ложно для любого из братьев, поэтому первый точно лгал. Значит и первое его высказывание ложно. Итак, первый из братьев по субботам не лжёт, значит первый – это Траляля. Тогда второй – Труляля, и в день встречи он говорил правду (если бы он лгал, то лгали бы оба брата, а такого ни в один из дней недели не бывает). То есть в день встречи Труляля говорил правду, но на следующий день будет лгать. Таким днём является только среда.
Критерии. Только ответ – 1 балл. Ответ с проверкой, что в среду ситуация возможна, при этом остальные дни не рассмотрены – 2 балла. Правильно доказано, что первый – это Траляля, а второй Труляля, но про день недели вывода нет или он неправильный – 3 балла. Без обоснований утверждается, что первый – Траляля, а второй – Труляля, в остальном решение правильное – 4 балла.

2. Существует ли такое целое число n, что $n^{2022} - 2\cdot n^{2021} + 3\cdot n^{2019} = 2020$?
Ответ: нет.
Решение 1. Рассмотрим возможные остатки от деления n на 3. Если n делится на 3 (остаток 0), то $(n^{2022} - 2\cdot n^{2021} + 3\cdot n^{2019})$ тоже делится на 3 (то есть остаток равен 0). Если n при делении на 3 даёт остаток 1, то n^{2022}, n^{2021} и n^{2019} тоже дают остаток 1, значит $(n^{2022} - 2\cdot n^{2021} + 3\cdot n^{2019})$ даёт остаток 2. Наконец, если n при делении на 3 даёт остаток 2, то n^2 дает остаток 1. Следовательно, n^{2022} дает остаток 1, n^{2021} и n^{2019} дают остаток 2, то есть $(n^{2022} - 2\cdot n^{2021} + 3\cdot n^{2019})$ дает остаток 0 . Таким образом, выражение в левой части равенства всегда дает при делении на 3 остаток 0 или 2. Но 2020 при делении на 3 дает остаток 1, значит равенство невозможно.
Решение 2. $n^{2022} - 2\cdot n^{2021} + 3\cdot n^{2019} = n^{2019}\cdot(n^3 - 2\cdot n^2 + 3) = 2020$. Если n – целое, то $(n^3 - 2\cdot n^2 + 3)$ тоже целое и $|n^{2019}|$ является делителем числа 2020. Очевидно, если $|n|\geq 2$, то $|n^{2019}| > 2020$ и никак не может быть делителем числа 2020. Остаётся проверить n = 1 и

$n = -1$. Простой подстановкой в исходное равенство убеждаемся, что они тоже не подходят.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Рассмотрение отдельных частных случаев (только нескольких конкретных значений n) – 0 баллов.

3. На столе лежит 4 стопки монет. В первой стопке 9 монет, во второй 7, в третьей 5, в четвертой 10. За один ход разрешается добавить по одной монете к трем разным стопкам. За какое наименьшее количество ходов можно добиться того, чтобы во всех стопках стало поровну монет?

Ответ: за 11 ходов.

Решение 1. Рассмотрим разницы между количеством монет в каждой из остальных стопок и количеством монет в стопке №3. За один ход либо каждая из этих разниц увеличится на 1 (если для добавления монет выбраны все стопки, кроме 3), либо ровно 1 из этих разниц уменьшится на 1 (в остальных случаях). Изначально эти разницы составляют 4, 2 и 5. Таким образом, чтобы уменьшить все эти разницы до 0, потребуется не менее, чем 4+2+5=11 ходов.

11 ходов возможно: 4 раза выбираем все стопки, кроме №1, 2 раза все стопки, кроме №2 и 5 раз все стопки, кроме №4. В итоге во всех стопках окажется по 16 монет.

Решение 2. Пусть мы совершили s ходов, из них s_k ходов, в которых мы прибавляем по монете ко всем стопкам, кроме k ($k\in\{1,2,3,4\}$). Тогда, исходя из условия равенства монет во всех стопках после всех ходов, получаем: $9 + s - s_1 = 7 + s - s_2 = 5 + s - s_3 = 10 + s - s_4$. Значит $s_1 = 4 + s_3 \geq 4$, $s_2 = 2 + s_3 \geq 2$ и $s_4 = 5 + s_3 \geq 5$. Значит $s \geq s_1 + s_2 + s_4 \geq 4 + 2 + 5 = 11$.

Пример на 11 ходов такой же, как в решении 1.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Ответ с примером – 3 балла.

Только доказательство, что ходов не меньше 11 – 4 балла.

4. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту CH, при этом оказалось, что CH = AB. Внутри треугольника CHB нашлась такая точка T, что треугольник BTH — прямоугольный равнобедренный с гипотенузой HB. Докажите, что угол ATC равен 90°.

Решение. Так как треугольник BTH — прямоугольный равнобедренный, то TH = TB и $\angle THB = \angle TBH = 45°$. Отсюда следует, что $\angle CHT = 90° - \angle THB = 45°$. Треугольники ABT и CHT равны по двум сторонам и углу между ними (AB = CH по условию, BT = HT и $\angle ABT = \angle CHT = 45°$). Значит $\angle CTH = \angle ATB$. Заметим, что $\angle CTH = \angle CTA + \angle ATH$, $\angle ATB = \angle ATH + \angle HTB$. Значит $\angle CTA = \angle HTB = 90°$.

Критерии. Особых критериев нет.

5. Из натуральных чисел от 1 до 99 выбрали 50 различных чисел так, что никакие два из них в сумме не дают 100 и никакие два из них в сумме не дают 99. Какие числа были выбраны?

Ответ: числа от 50 до 99.

Решение. Разобьем числа на 49 пар (1, 99), (2, 98), …, (49, 51), число 50 останется без пары. В каждой паре сумма чисел равна 100, значит из каждой пары выбрано не более 1 числа. Пар 49, а всего чисел выбрано 50, значит из каждой пары выбрано ровно 1 число, и оставшееся число 50 тоже выбрано. Поскольку выбрано 50, то 49 брать нельзя, и из пары (49, 51) нужно взять 51. Но раз мы взяли 51, то нельзя брать 48. Продолжая рассуждать аналогично мы получим, что из каждой пары нужно взять большее число.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Присутствует идея разбиения чисел на 49 таких пар, что сумма чисел в них равна 100 (либо 49 таких пар, что сумма чисел в них равна 99) – 2 балла.