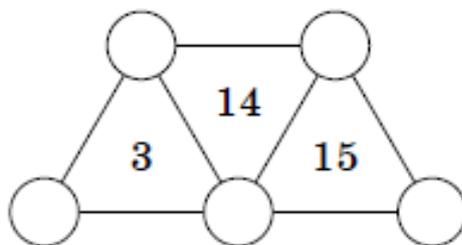


8 класс

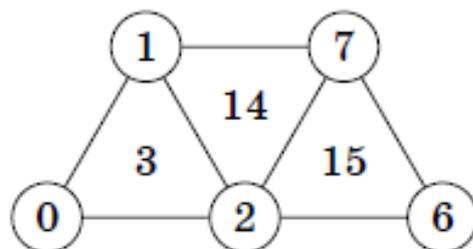
1. Два класса с одинаковым количеством учеников написали контрольную. Проверив контрольные, строгий директор Александр Владимирович сказал, что он поставил двоек на 11 больше, чем остальных оценок. Не ошибся ли Александр Владимирович?

Решение. Пусть в каждом классе по x учеников, тогда в двух классах $- 2x$ учеников (четное число). Пусть Александр Владимирович поставил y других отметок (не двоек), тогда двоек он поставил $y + 11$. Итак, всего он поставил $2y + 11$ отметок (нечетное число). Поскольку количество учеников должно совпадать с количеством оценок, то делаем вывод, что Александр Владимирович ошибся ($2x \neq 2y + 11, x, y \in \mathbb{N}$). **Ответ:** ошибся.

2. Миша расставил в кружках различные цифры, а внутри каждого треугольника записал либо сумму, либо произведение цифр в его вершинах. Потом он стёр цифры в кружочках. Впишите в кружочки различные цифры так, чтобы условие выполнялось.



Решение.



Найти этот ответ и заодно доказать его единственность можно так. Число 3 не может быть получено как произведение трёх различных чисел, значит, оно получено как сумма $0+1+2$. Тогда число 14 уже не может быть получено как сумма: две «общие» с числом 3 цифры в сумме дадут максимум 3, и ещё одной цифры, чтобы набрать 14, не хватит. Значит, 14 получено как произведение: $1 \cdot 2 \cdot 7$.

Тогда число 15 получено с использованием 7 и 1 или 7 и 2 – в частности, получено как сумма. Вариант 7 и 1 невозможен: третьей цифрой должна быть $15-1-7=7$, а она уже использована. Значит, 15 составлено как $2+7+6$.

Комментарий. Приведен верный пример, без объяснения его единственности – 7 баллов.

3. В некотором государстве первоначально было 10 банков. С момента перестройки общества все захотели быть банкирами. Но, по закону, открыть банк можно только путем деления уже существующего банка на 8 новых банков. Через 2 года министр финансов сообщил президенту, что в стране действует уже 2023 банка, после чего был немедленно уволен за некомпетентность. Как президент понял, что его обманывают?

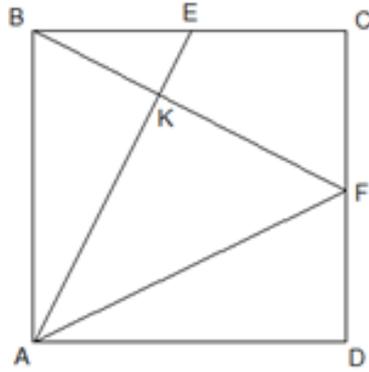
Решение. Заметим, что при данном алгоритме открытия новых банков у их общего количества не меняется остаток от деления на 7. Действительно, пусть на данный момент открыто N банков, тогда при следующем открытии новых их количество будет $N - 1 + 8 = N + 7$, то есть остаток от деления на 7 не изменился. Заметим, что 10 при делении на 7 дает в остатке 3, а 2023 делится на 7. Полученное противоречие и было замечено президентом.

4. Доход студента складывается из трёх источников: стипендия, временная подработка и помощь родителей. Если правительство удвоит стипендию, то его доход возрастёт на 5%. Если время подработки увеличить в два раза, то доход возрастёт на 15%. На сколько процентов возрастёт доход студента, если его папа с мамой будут присылать денег вдвое больше?

Решение. Пусть S – ежемесячный доход студента, a , b и c – величины стипендии, подработки и помощи родителей соответственно (выраженные, например, в рублях). Ясно, что $S = a + b + c$. Тогда по условию $2a + b + c = 1,05S$ и $a + 2b + c = 1,15S$. Из первого уравнения $a = 0,05S$, из второго $b = 0,15S$, тогда $c = S - a - b = 0,8S$, $a + b + 2c = 1,8S$, то есть, доход студента возрастёт на 80%. **Ответ:** 80%.

5. В квадрате $ABCD$ отмечены точки E и F – середины сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE и BF пересекаются в точке K . Что больше: площадь треугольника AKF или площадь четырехугольника $KECF$?

Решение.



Пусть площадь квадрата $ABCD$ равна $4S$, тогда площадь каждого из треугольников ABE , ADF и BCF равна S , поэтому площадь треугольника ABF равна $2S$. Но треугольник AKB - часть треугольника ABE , поэтому его площадь меньше S , а площадь треугольника AKF больше S . С другой стороны, площадь четырехугольника $KECF$ меньше S , так как он составляет часть треугольника BCF . **Ответ:** площадь треугольника больше.