8 класс

1. Можно ли найти четыре различных натуральных числа, каждое из которых не делится ни на 2, ни на 3, ни на 4, но сумма любых двух делится на 2, сумма любых трёх делится на 3, а сумма всех четырёх делится на 4?

Ответ: *можно, например,* 5, 17, 29 *и* 41.

Решение. Указанные четыре числа можно записать в виде $12k+5$, где k принимает значения 0, 1, 2, 3, поэтому сумма любых трёх чисел

$$(12k_1+5)+(12k_2+5)+(12k_3+5)=12(k_1+k_2+k_3)+15$$

делится на 3. Все числа в наборе нечётные, значит, сумма любых двух делится на 2. Наконец, сумма всех четырёх чисел равна 72 и делится на 4.

Замечание. Можно доказать, что все числа имеют равные остатки при делении на 6.

Критерии. Любой верный пример — 7 баллов. Отмечено, что числа имеют равные остатки при делении на 3 или на 6, однако приведён ошибочный пример — 2 балла.

2. По кругу расставили в некотором порядке числа от 1 от 8, а затем записали суммы соседних чисел. Могло ли получиться 8 последовательных чисел (в каком-то порядке)?

Ответ: *нельзя.*

Решение. Предположим, что получилось восемь последовательных чисел-сумм

$$x-3, x-2, x-1, x, x+1, x+2, x+3, x+4.$$

Сумма этих чисел равна $8x+4$, и она должна быть в два раза больше суммы чисел от 1 до 8 (каждое участвует ровно в двух суммах). Тогда

$$8x+4=2\cdot(1+2+\ldots+8)=72, \iff 2x=17.$$

Такого целого числа x нет.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильно составлено уравнение — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

3. Найдите все различные простые числа a, b и c такие, что $ab+bc+ca \geqslant abc$.

Ответ: $a=2, b=3, c=5$ *и все наборы, полученные перестановкой этих чисел.*

Решение. Предположим, что $a<b<c$, тогда $ab<bc$ и $ac<bc$.

Если $a \geqslant 3$, то $ab+bc+ca<3bc \leqslant abc$, противоречие. Число a — простое, значит, $a=2$, и тогда получаем $2b+2c+bc \geqslant 2bc$, или $0 \geqslant bc-2b-2c$. Прибавим 4 к обеим частям и запишем последнее неравенство в виде:

$$4 \geqslant (b-2)(c-2).$$

Поскольку $3 \leqslant b<c$ и каждый сомножитель в правой части не превосходит 4, неравенство выполняется только для чисел $b=3$, $c=5$.

Критерии. Указан только набор $(2,3,5)$ или его перестановка — 1 балл. Доказано, что наименьшее число равно 2 — ещё 3 балла. За отсутствие перестановок набора $(2,3,5)$ баллы не снижаются. Полное решение — 7 баллов.

4. За круглым столом сидят 30 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждого спросили: «Сколько рыцарей среди ваших соседей?» (Двое сидящих называются *соседями* друг друга, если между ними нет других сидящих.) 10 человек ответили «один», 10 — «два» и 10 — «ни одного». Каким наибольшим может быть число рыцарей за столом?

Ответ: 22 *рыцаря.*

Решение. Из условия задачи следует, что число рыцарей, имеющих по два соседа-рыцаря, не превосходит 10; то же самое можно сказать и про число рыцарей, имеющих по одному соседу-рыцарю. Поэтому число пар рыцарей-соседей друг друга не превосходит $(2 \cdot 10 + 1 \cdot 10) : 2 = 15$. А поскольку всего за столом имеется 30 пар соседей, то по меньшей мере в $30 - 15 = 15$ парах есть люди, рыцарями не являющиеся; число таких людей не меньше, чем $\left[\frac{15}{2}\right] + 1 = 8$.

Приведём пример, показывающий, что за столом может быть в точности $30 - 8 = 22$ рыцаря. Пусть сидящие пронумерованы числами от 1 до 30 по часовой стрелке, а рыцарями являются все те, чьи номера отличны от 1, 3, 5, 7, 11, 15, 19 и 23. Тогда все необходимые условия будут выполнены, если № 1 ответит «два», а № 3, 5, 7, 11, 15, 19 и 23 — «ни одного».

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что число рыцарей не более 22 (*оценка*) — 3 балла. Приведён пример с 22 рыцарями — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. В треугольнике ABC угол A равен $75°$, угол C равен $60°$. На продолжении стороны AC за точку C отложили отрезок CD, равный половине стороны AC. Найдите угол BDC.

Ответ: $\angle BDC = 45°$.

Решение. В данном треугольнике угол ABC, очевидно, равен $180° - 75° - 60° = 45°$. Проведём высоту AH и заметим, что треугольник AHB — равнобедренный, так как $\angle BAH = 90° - 45° = \angle ABH$ (рис. 1). Значит, $AH = BH$. В прямоугольном треугольнике AHC угол HAC равен $75° - 45° = 30°$, поэтому катет HC равен половине гипотенузы AC, то есть равен CD. Таким образом, треугольник HCD — равнобедренный, и $\angle HCD = 120°$, поэтому углы CHD и CDH равны $\frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$. Поскольку $\angle HAD = \angle ADH = 30°$, треугольник AHD также равнобедренный и $BH = AH = DH$, то есть равнобедренным будет и треугольник BHD. По свойству внешнего угла, $\angle HBD = \angle HDB = \frac{1}{2}\angle CHD = 15°$. Следовательно, $\angle BDC = \angle BDH + \angle HDC = 45°$.

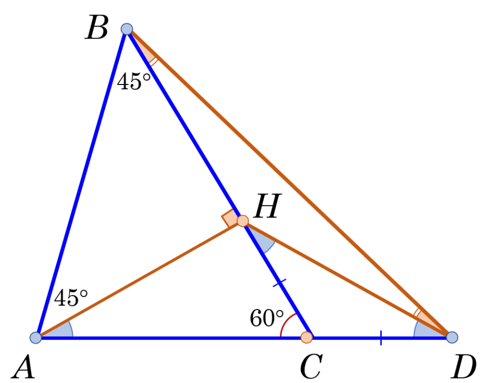

Рис. 1

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказана равнобедренность треугольника AHB — 1 балл, треугольника AHD — 4 балла, треугольника BHD — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.