Ключи к заданиям муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников 2022/23 учебного года по математике

Условия и решения задач

8.1. Существует ли десятизначное число, кратное 11, в записи которого встречаются все цифры от 0 до 9?

Ответ. Да, например, 9576843210.

Решение. Приведём возможный вариант нахождения требуемого числа. Заметим, что число делится на 11, если разность суммы цифр, стоящих на нечётных местах, и суммы цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11. Если записать все десять цифр по убыванию, то есть 9876543210, то эта разность будет равна 5. Если поменять местами 5 и 8, то первая сумма увеличится на 3, а вторая уменьшится на 3, поэтому их разность станет равна 11. И тогда число 9576843210 делится на 11.

Комментарий. Любое приведенное верное число – 7 баллов.

8.2. Имеются чашечные весы без гирь и 11 одинаковых по внешнему виду монет, среди которых, возможно, одна фальшивая, причём неизвестно, легче она настоящих монет или тяжелее (настоящие монеты одного веса). Как за два взвешивания найти хотя бы 8 настоящих монет?

Решение. Выделим три кучки по три монеты в каждой. Сравним 1 и 2 кучку, а затем — 2 и 3 кучки. Если все три кучки равны по весу, то все монеты в них настоящие, и мы нашли 9 настоящих монет. В противном случае одна из кучек отличается по весу от других, и фальшивая монета может находиться только в ней. Тогда настоящие монеты находятся в двух других кучках плюс две оставшиеся монеты, которые мы не взвешивали.

8.3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что расстояния от точек A и B до точки пересечения диагоналей четырёхугольника равны, если известно, что равны периметры треугольников ABC и ABD, а также равны периметры треугольников ACD и BCD.

Решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей четырёхугольника. По условию $AC + BC = AD + BD, AC + AD = BC + BD.$ Записав второе равенство в виде $AC - BC = BD - AD$ и сложив его с первым, получим $2AC = 2BD$, то есть $AC = BD.$ Значит, $AD = BC$, следовательно, треугольники ADB и BCA равны (по трём сторонам). Поэтому $\angle ABD = \angle BAC$, то есть треугольник AOB – равнобедренный.

8.4. На каждой клетке шахматной доски лежит по стопке из нескольких фишек. За один ход разрешается выполнить одну из двух операций:

– убрать по одной фишке из каждой стопки любой вертикали;

– удвоить количество фишек в каждой стопке любой горизонтали.

Можно ли за некоторое количество таких операций полностью очистить доску от фишек?

Ответ. Да.

Решение. Запишем количество фишек в каждой клетке доски в таблицу 8×8. В таком случае возможны два вида операций: вычитание единицы из каждой ячейки любого столбца; удвоение любой строки. Наша цель – получить таблицу, заполненную нулями.

Превратим в нули вначале все числа первого столбца. Если в первом столбце есть единицы, то удвоим числа в тех строках таблицы, на пересечении которых с первым столбцом стоят единицы, а затем вычтем из всех чисел первого столбца по единице. Понятно, что при этом "старые" единицы останутся на местах, а каждое отличное от единицы число первого столбца на единицу уменьшится. Если единиц в первом столбце с самого начала нет, то будем вычитать из всех его чисел по единице до тех пор, пока единицы (хотя бы одна) не появятся, а затем произведём уже описанную операцию. Эту операцию (удвоения строк, на пересечении которых с первым столбцом находятся единицы, и последующего вычитания по единице из каждого числа первого столбца) будем повторять, пока все числа первого столбца не станут единицами. Вычитая затем из каждого числа первого столбца по единице, мы превратим их все в нули.

Итак, мы получили таблицу, в первом столбце которой стоят нули, а в остальных столбцах – натуральные числа. Превратив в нули описанным способом последовательно числа 2-го, 3-го, ..., 8-го столбцов (при этом уже имеющиеся нули не будут "портиться"), мы получим таблицу, состоящую целиком из нулей.

8.5. Найдите все числа вида 22...2, которые можно представить в виде суммы двух точных квадратов.

Ответ. 2.

Решение. Пусть $22\ldots2 = a^2 + b^2$ для некоторых целых чисел a и b.

Если числа a и b чётны, то сумма их квадратов делится на 4, а число $22\ldots2$ – нет.

Таким образом, числа a и b могут быть только нечетными:

$$a = 2k + 1, b = 2l + 1\ (k, l \in Z).$$

Следовательно, сумма

$$a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = 4k(k + 1) + 4l(l + 1) + 2$$

при делении на 8 дает в остатке 2.

С другой стороны, среди чисел вида 222...2 только число 2 при делении на 8 дает в остатке 2, поскольку если число двоек в этом числе больше 1, то

22...2 = 22...2200 + 22, при этом первое слагаемое полученной суммы делится на 8, а второе при делении на 8 дает в остатке 6.

Комментарии к оцениванию. Показано, что числа а и b могут быть только нечетными – 2 балла.