Ключи. 8 класс. ВсОШ по математике. Муниципальный этап. 2022-2023 учебный год.

Принципы оценивания

1. *Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.*
2. *Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.*
3. *Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.*

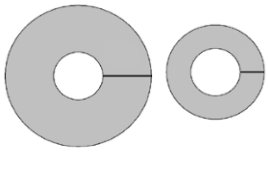
Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части— решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в критериях или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

8.1 Решение. Обозначим массы мешков A > B > C > D > E. Тогда D + E = 110, C+E = 112, A+B = 121, A+C = 120. Сложив всевозможные попарные суммы, получим пятое уравнение: 4(A+ B + C + D + E) = 1156, то есть A + B + C + D + E = 289. Вычитая из последнего уравнения первое и третье, находим C = 58. Тогда A = 62, B = 59, E = 54, D = 56. Непосредственной проверкой убеждаемся, что найденные веса действительно соответствуют условию задачи. ОТВЕТ: 62, 59, 58, 56, 54.

8.2. Решение. Длина рулона обоев – это примерно площадь поперечного сечения рулона, делённая на толщину обоев. Поэтому, чтобы узнать, какую часть рулона мы истратили, посчитаем, во сколько раз уменьшилась площадь поперечного сечения. Сечение рулона – это кольцо, поэтому его площадь – это разность площадей кругов, ограниченных внешней и внутренней окружностями (напомним, что площадь круга радиуса r равна $\pi\bullet r^2$). Площадь оставшегося рулона: $\pi\bullet(5 + 5)^2 - \pi\bullet 5^2 = \pi\bullet 100 - \pi\bullet 25 = \pi\bullet 75$. Первоначальная площадь:

$\pi\bullet(5 + 10)^2 - \pi\bullet 5^2 = \pi\bullet 225 - \pi\bullet 25 = \pi\bullet 200$. Получается, что у бабы Клавы осталось лишь $\frac{75}{200} = \frac{3}{8}$ рулона. На половину комнаты ушло $\frac{5}{8}$ рулона. Значит, оставшегося хватит на $0{,}5\bullet\frac{3}{8}:\frac{5}{8} = 0{,}3$ комнаты.



8.3. Решение. Нули образуются от перемножения четных чисел и пятерок. Посчитаем число пятерок в произведении. В каждом множителе, стоящем на 5-м, 10-м, ..., 2020-м местах, есть, как минимум, одна пятерка. Получили 2020 : 5 = 404 (пятерки). Но в числах 25, 50, ..., 2000 будет по 2 пятерки. Значит, надо добавить еще 2000 : 25 = 80 (пятерок). В числах 125, 250, ..., 2000 содержится в качестве множителя по 3 пятерки, значит, добавляем еще 2000 : 125 = 16 (пятерок). В числах 625, 1250, 1875 — по 4 пятерки. Поэтому добавляем еще 3 пятерки. Итого имеем 404 + 80 + 16 + 3 = 503. При умножении их на четные числа (а их больше, чем 503) получим, что заданное произведение оканчивается 503 нулями.

8.4. Решение. Пусть в конце концов на складе осталось N волейбольных мячей. Тогда футбольных мячей осталось в 20 раз больше, то есть 20N. Пусть перед тем как изъяли 3 мяча, было Ф футбольных и В волейбольных мячей (и по условию $\frac{Ф}{В} = 7$).

1) Неизвестно, сколько каких мячей было среди этих трёх изъятых, но тем не менее можно уверенно утверждать, что 20N ≤ Ф и N +3≥ В. Поэтому $\frac{20N}{N+3} \le \frac{Ф}{В} = 7$. Тогда получим $20N \le 7(N+3)$, и $N \le \frac{21}{13}$. Но N – натуральное число. Имеем N=1 и 20N=20. Итак, в конечном счете осталось 20 футбольных и 1 волейбольный мяч.
2) Перед тем, как изъяли 3 мяча, на складе могло быть различное число футбольных и волейбольных мячей (в зависимости от того, сколько каких мячей изъяли). Однако здесь можно сделать прямой перебор вариантов, которые сведём в таблицу:

Количество мячей перед тем, как изъяли 3 мяча (возможны варианты)		Во сколько раз количество футбольных мячей превосходит количество волейбольных
футбольных	волейбольных	
20	4	20:4=5
21	3	21:3=7
22	2	22:2=11
23	1	23:1=23

Как видно, число футбольных мячей превосходит число волейбольных в 7 раз только в том случае, когда на складе было 3 волейбольных мяча и 21 футбольный. Пойдем назад ещё дальше. Перед этим изымались только волейбольные мячи, и до их изъятия футбольных и волейбольных мячей было поровну. То есть число футбольных мячей не изменилось и в самом начале их было 21. Волейбольных, естественно, было столько же, то есть тоже 21.

Теперь можно восстановить полную картину. Итак, изначально было по 21 футбольному и волейбольному мячу. Затем забрали 21 – 3 = 18 волейбольных мячей, и их осталось 3 (в 7 раз меньше, чем футбольных). Потом взяли ещё 1 футбольный и 2 волейбольных мяча, и осталось 20 футбольных и 1 волейбольный мяч (футбольных в 20 раз больше, чем волейбольных).

Ответ: 42 мяча.

Комментарий. Если в решении дана только оценка, задачу следует оценить в 4 балла. Если получен ответ методом подбора, то – 1 балл.

8.5. Решение.

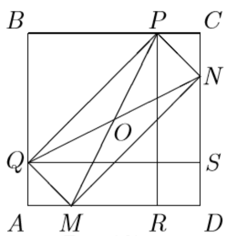


Рис.1

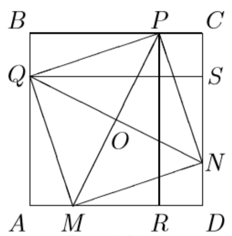


Рис.2

Первый способ. Пусть ABCD — квадрат, MNPQ — вписанный в него прямоугольник, причем M ∈ AD, N ∈ CD, P ∈ BC, Q ∈ AB (см. рис.1, 2). Проведём в MNPQ диагонали и опустим из точек P и Q на стороны квадрата перпендикуляры с основаниями R и S, соответственно. Треугольники PMR и QNS равны, так как имеют равные гипотенузы и равные катеты PR и QS. Тогда MR = SN. Пусть AM = x, MD = y, CN = u, ND = v. Очевидно, что MR = |y−x|, SN = |u−v|. С другой стороны, x + y = AD = u + v. Из условия, что стороны прямоугольника не параллельны диагоналям квадрата, следует, что x ≠ u, y ≠ v (случай, изображённый на рис.1, невозможен). Но тогда x = v, y = u. Значит, треугольники QMA и MND равны, и MNPQ — квадрат.

Второй способ. Из подобия треугольников MAQ и MDN имеем:

$\frac{x}{v} = \frac{y}{u}$, но $x + y = v + u$, откуда $y\left(1 + \frac{v}{u}\right) = u + v$, $(u + v)(y - u) = 0$, и $y = u$, а значит $x = v$, $\Delta QMA = \Delta MND$, и $MNPQ$ − квадрат.