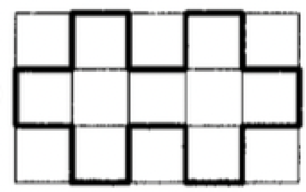
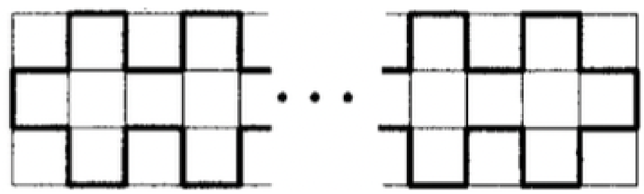
Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
по математике
2022-2023 учебный год
8 класс
Максимальный балл – 35
Решения

1. У Даши есть лист клетчатой бумаги, сторона клеток равна 1. Рисовать можно только по линиям сетки. Помогите Даше нарисовать:
а) 20-угольник площади 9;
б) 100-угольник площади 49.
Решение. См. рис. 1.



а)



б)

Рис. 1: Рисунок слева ответ к пункту а), вправа к пункту б).

В примере б) 12 вертикальных "палочек."
Критерии. Полное решение – 7 баллов. Если картинка как в ответе на пункт б) и не сказано сколько "палочек"или сколько раз повторяется конструкция – снять 1 балл.

2. Катя пригласила к себе в гости трёх котят и щенка решать математические задачи. После решения задач Катя пересчитала пироженки на кухне и заметила, что двух не хватает. У Кати есть чашечные весы без гирь, на чаши которых она может помещать пирожные, котят и щенка. Все пирожные весят одинаково, все котята в момент прихода в гости – тоже. Также известно, что щенок на диете и поэтому не мог съесть более одной пироженки. Как Кате за два взвешивания определить, кто съел пирожные?
Решение. Обозначи котят К1, К2, К3. Сначала сравним котят К1 и К2. Возможны два исхода.
1) Один из котят оказался тяжелее, например, $K1 > K2$. Тогда вторым взвешиванием сравним К1 и К3 + пирожное. Если К1 $<$ К3 + пирожное, то К1 и К3 съели по пироженке. Если К1 $=$ К3 + пирожное, то К1 и щенок съели по пироженке. Если К1 $>$ К3 + пирожное, то обе пироженки съел К1.
2) Веса котят оказались одинаковыми. Тогда вторым взвешиванием сравним К1 + пирожное и К3. Если К1 + пирожное $<$ К3, то обе пироженки съел К3. Если К1 + пирожное $=$ К3, то К3 и щенок съели по пироженке. Если К1 + пирожное $>$ К3, то К1 и К2 съели по пироженке.
Критерии. Полное решение – 7 баллов.

3. Найдите численное значение выражения

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}$$

если известно, что x не равно y и сумма первых двух слагаемых равна третьему.
Ответ. 2.
Решение. Приведём к общему знаменателю условие

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1},$$

получим

$$\frac{(x^2+y^2+2)(xy+1)-2(x^2+1)(y^2+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(xy+1)}=0,$$

раскроем все скобки с числителе, приведем подобные, получим равенство $(x-y)^2(xy-1)=0$. Поскольку $x\neq y$, то $xy=1$. Отсюда третье слагаемое равно 1, а тогда вся сумма равна 2.
Критерии. Полное решение – 7 баллов. Приведено правильно к общему знаменателю, приведены правильно все подобные, но без дальнейшего продвижения – 1 балл. Рассуждения по типу "если x взять таким, а y другим, то что-то получится"оценивается в 0 баллов.

4. В многоэтажную дробь

$$\mathrm{P}+\cfrac{1}{\mathrm{A}+\cfrac{1}{\mathrm{B}+\cfrac{1}{\mathrm{H}+\cfrac{1}{\mathrm{O}}}}}$$

вместо букв подставили ненулевые цифры. Какой наименьший результат при этом получится? (Как обычно, разным буквам соответствуют разные цифры).

Ответ. $1+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{3}}}}=1\frac{53}{502}$.

Решение. Обозначим всю дробь Т и запишем

$$\mathrm{T}=\mathrm{P}+\frac{1}{X},\qquad X=\mathrm{A}+\frac{1}{Y},\qquad Y=\mathrm{B}+\frac{1}{\mathrm{Z}},\qquad Z=\mathrm{H}+\frac{1}{\mathrm{O}}.$$

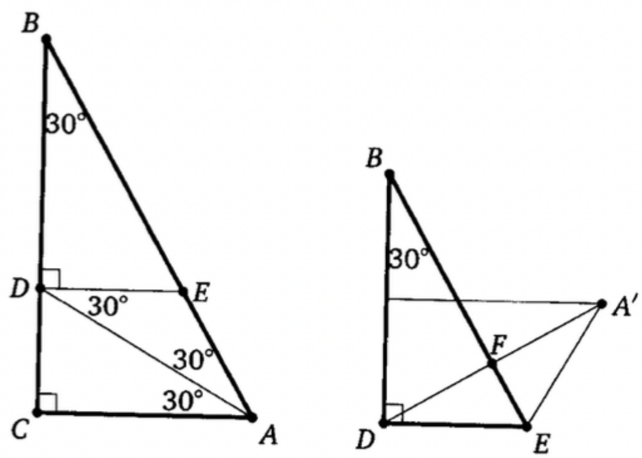
Заметим, что все числа X, Y, Z больше 1, поэтому вторые слагаемые в перых трёх выражениях меньше 1. А если изменить в них первое слагаемое, то оно изменится минимум на 1, значит, и сумма изменится в ту же сторону (второе слагаемое может изменится меньше чем на 1 и не скомпенсирует изменение первого слагаемого). Поэтому Т тем меньше, чем меньше Р, то есть следует взять Р = 1. Также Т тем меньше, чем больше Х, поэтому А должно быть максимально, то есть А = 9. Число Х тем больше, чем меньше Y, то есть чем меньше В. Значит, В = 2. При этом Y тем меньше, чем больше Z. Максимальное Z достигается при максимальном Н = 8 и минимальном О = 3, откуда получаем ответ.
Критерии. Полное решение – 7 баллов. За правильный ответ без обоснования – 2 балла.

5. После темы «треугольники» всем ученикам выдали бумажные треугольники и ножницы для решения очередной задачи. Непослушный Коля, не слыша учителя сделал следующее:

согнул свой треугольник по прямой, сделал ножницами прямой разрез, получил три части, согнутые разогнул. Коля побежал к учителю и сказал: «Все три части оказались равными неравнобедренными треугольниками». Могут ли слова Коли быть правдой?

Ответ. Да, могут.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$. Проведем его биссектрису AD и перпендикуляр DE к катету BC (см. рис. левый). Перегнём треугольник по прямой DE, тогда точка A займёт положение A', после чего сделаем разрез по прямой DA' (см. рис. правый).



При таком разрезании и последующем разгибании образуются три треугольника: ACD, AFD и BFD, где F – точка пересечения прямых DA' и AB. Докажем, что эти треугольники равны. Для этого достаточно доказать, что $DF \perp AB$, так как в этом случае равенство треугольников ACD и AFD будет следовать из их симметрии относительно биссектрисы AD, а равенство треугольников AFD и BFD – из равенства соответствующих острых углов и наличия общей стороны DF.

Так как $DE \| CA$, то $\angle DEF = \angle CAB = 60°$, $\angle ADE = \angle CAD = 30°$, значит, $\angle AFD = 90°$, что и требовалось.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Если не доказано равенство треугольников ACD, AFD и BFD – 3 балла. Не верно доказано какое-то равенство треугольников, а другие верно – снять 2 балла.