8 класс

Задача 8.1.1. Дима и Серёжа собирали ягоды с куста малины, на котором росло 900 ягод. Дима при сборе ягод чередовал действия: одну ягоду он клал в корзину, а следующую ел. Серёжа тоже чередовал: две ягоды он клал в корзину, а одну следующую ел. Известно, что Дима срывает ягоды в 2 раза быстрее Серёжи. В какой-то момент ребята собрали всю малину с куста.

Кто из них в итоге положил в корзину больше ягод? Чему будет равна разница?

Ответ: Дима, на 100 ягод больше.

Решение. Пока Дима срывает 6 ягод, Серёжа успевает сорвать только 3. При этом Дима из своих 6 ягод кладёт в корзину только 3, а Серёжа из своих 3 — только 2.

Получается, что среди каждых сорванных $6 + 3 = 9$ ягод ровно 3 в корзину кладёт Дима, а ровно 2 — Серёжа. Тогда всего Дима положит в корзину $\frac{3}{9} \cdot 900 = 300$ ягод, а Серёжа — $\frac{2}{9} \cdot 900 = 200$ ягод. Значит, Дима положит на $300 - 200 = 100$ ягод больше. □

Вариант 8.1.2. Дима и Серёжа собирали ягоды с куста малины, на котором росло 900 ягод. Серёжа при сборе ягод чередовал действия: одну ягоду он клал в корзину, а следующую ел. Дима тоже чередовал: две ягоды он клал в корзину, а одну следующую ел. Известно, что Серёжа срывает ягоды в 2 раза быстрее Димы. В какой-то момент ребята собрали всю малину с куста.

Кто из них в итоге положил в корзину больше ягод? Чему будет равна разница?

Ответ: Серёжа, на 100 ягод больше.

Вариант 8.1.3. Дима и Серёжа собирали ягоды с куста малины, на котором росло 450 ягод. Дима при сборе ягод чередовал действия: одну ягоду он клал в корзину, а следующую ел. Серёжа тоже чередовал: две ягоды он клал в корзину, а одну следующую ел. Известно, что Дима срывает ягоды в 2 раза быстрее Серёжи. В какой-то момент ребята собрали всю малину с куста.

Кто из них в итоге положил в корзину больше ягод? Чему будет равна разница?

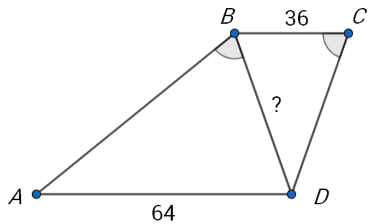
Ответ: Дима, на 50 ягод больше.

Вариант 8.1.4. Дима и Серёжа собирали ягоды с куста малины, на котором росло 450 ягод. Серёжа при сборе ягод чередовал действия: одну ягоду он клал в корзину, а следующую ел. Дима тоже чередовал: две ягоды он клал в корзину, а одну следующую ел. Известно, что Серёжа срывает ягоды в 2 раза быстрее Димы. В какой-то момент ребята собрали всю малину с куста.

Кто из них в итоге положил в корзину больше ягод? Чему будет равна разница?

Ответ: Серёжа, на 50 ягод больше.

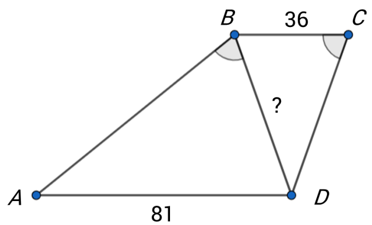
Задача 8.2.1. Дана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Оказалось, что $\angle ABD = \angle BCD$. Найдите длину отрезка BD, если $BC = 36$ и $AD = 64$.



Ответ: 48.

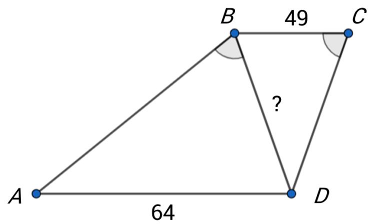
Решение. Поскольку $AD \parallel BC$, имеем $\angle CBD = \angle BDA$. Тогда треугольники ABD и DCB подобны по первому признаку. Следовательно, $\frac{64}{BD} = \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{36}$, откуда находим $BD = \sqrt{64 \cdot 36} = 48$. □

Вариант 8.2.2. Дана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Оказалось, что $\angle ABD = \angle BCD$. Найдите длину отрезка BD, если $BC = 36$ и $AD = 81$.



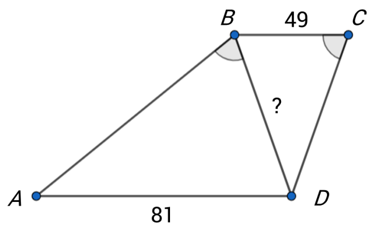
Ответ: 54.

Вариант 8.2.3. Дана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Оказалось, что $\angle ABD = \angle BCD$. Найдите длину отрезка BD, если $BC = 49$ и $AD = 64$.



Ответ: 56.

Вариант 8.2.4. Дана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Оказалось, что $\angle ABD = \angle BCD$. Найдите длину отрезка BD, если $BC = 49$ и $AD = 81$.



Ответ: 63.

Задача 8.3.1. В качестве домашнего упражнения Тане задали придумать 20 примеров вида $* + * = *$, где вместо $*$ нужно вставлять различные натуральные числа (т. е. всего должно использоваться 60 различных чисел). Таня очень любит простые числа, поэтому решила использовать их как можно больше, и чтобы при этом получались правильные примеры. Какое наибольшее количество простых чисел может использовать Таня?

Ответ: 41.

Решение. Заметим, что в каждом примере вместо звёздочек не могут использоваться три нечётных числа, т. е. должно использоваться хотя бы одно чётное число. Существует ровно одно чётное простое число — это 2. Следовательно, среди 60 различных чисел в примерах будет использоваться хотя бы 19 чётных составных, а простых может быть не более 41.

Как известно, простых чисел бесконечно много. Покажем, как можно составить примеры, чтобы в них участвовало ровно 41 простое число.

- $2 + 3 = 5$ — используются 3 простых числа;
- $7 + 11 = 18$ — используются 2 простых числа;
- $13 + 17 = 30$ — используются 2 простых числа;

- $19 + 23 = 42$ — используются 2 простых числа;
- в каждом следующем примере в левой части используются два следующих по величине простых числа.

Все 60 чисел в таких 20 примерах будут различны: все нечётные числа — это различные простые, а чётные, кроме 2 — это суммы, которые возрастают при переходе от предыдущего примера к следующему, и поэтому не могут повториться. □

Вариант 8.3.2. В качестве домашнего упражнения Тане задали придумать 10 примеров вида $* + * = *$, где вместо $*$ нужно вставлять различные натуральные числа (т. е. всего должно использоваться 30 различных чисел). Таня очень любит простые числа, поэтому решила использовать их как можно больше, и чтобы при этом получались правильные примеры. Какое наибольшее количество простых чисел может использовать Таня?

Ответ: 21.

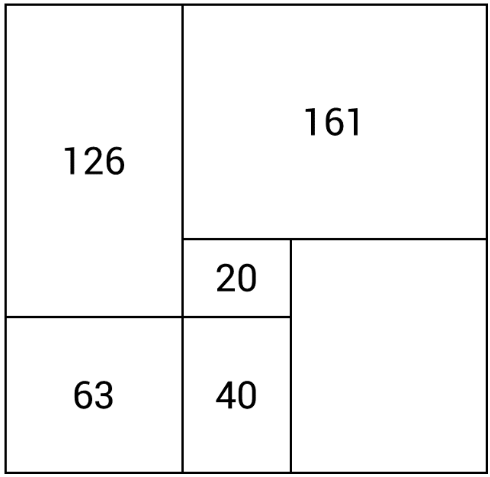
Вариант 8.3.3. В качестве домашнего упражнения Тане задали придумать 30 примеров вида $* + * = *$, где вместо $*$ нужно вставлять различные натуральные числа (т. е. всего должно использоваться 90 различных чисел). Таня очень любит простые числа, поэтому решила использовать их как можно больше, и чтобы при этом получались правильные примеры. Какое наибольшее количество простых чисел может использовать Таня?

Ответ: 61.

Вариант 8.3.4. В качестве домашнего упражнения Тане задали придумать 40 примеров вида $* + * = *$, где вместо $*$ нужно вставлять различные натуральные числа (т. е. всего должно использоваться 120 различных чисел). Таня очень любит простые числа, поэтому решила использовать их как можно больше, и чтобы при этом получались правильные примеры. Какое наибольшее количество простых чисел может использовать Таня?

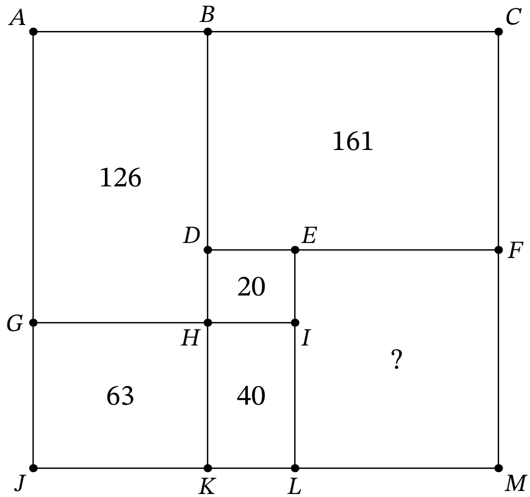
Ответ: 81.

Задача 8.4.1. Прямоугольник разрезали на шесть меньших прямоугольников, площади пяти из них обозначены на рисунке. Найдите площадь оставшегося прямоугольника.



Ответ: 101.

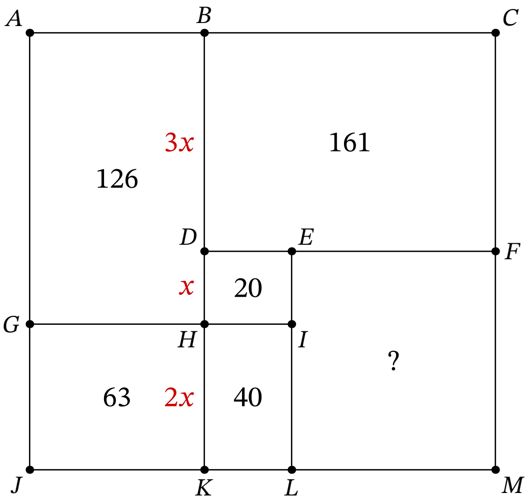
Решение. Введём обозначения так, как показано на рисунке.



Заметим, что

$$2 = \frac{40}{20} = \frac{S_{HILK}}{S_{DEIH}} = \frac{HK \cdot HI}{HD \cdot HI} = \frac{HK}{HD} \quad \text{и} \quad 2 = \frac{126}{63} = \frac{S_{ABHG}}{S_{GHKJ}} = \frac{BH \cdot GH}{HK \cdot GH} = \frac{BH}{HK}.$$

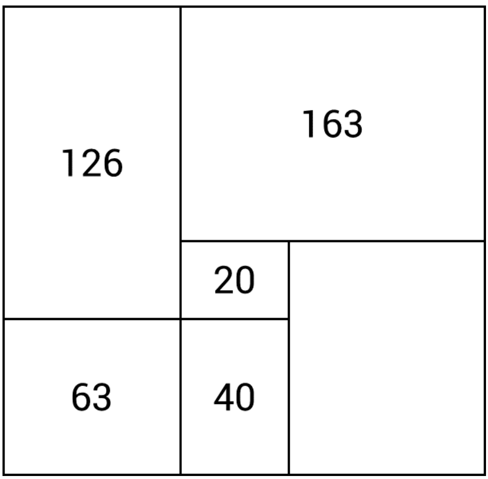
Поэтому если $HD = x$, то $HK = 2x$, а $BH = 4x$. Отсюда сразу следует, что $BD = 3x = DK$.



Получаем, что прямоугольники $BCFD$ и $DFMK$ равны, как и их площади. Значит,

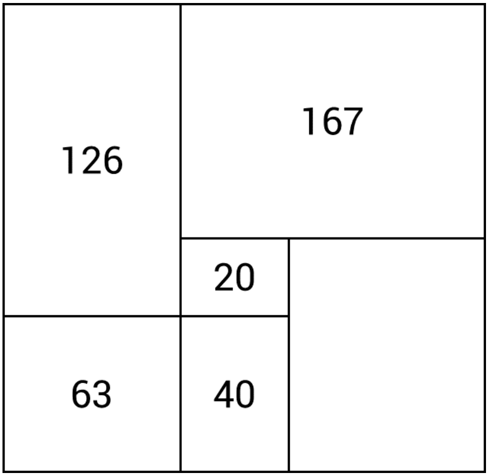
$$S_{EFML} = S_{DFMK} - S_{DEIH} - S_{HILK} = 161 - 20 - 40 = 101. \qquad \square$$

Вариант 8.4.2. Прямоугольник разрезали на шесть меньших прямоугольников, площади пяти из них обозначены на рисунке. Найдите площадь оставшегося прямоугольника.



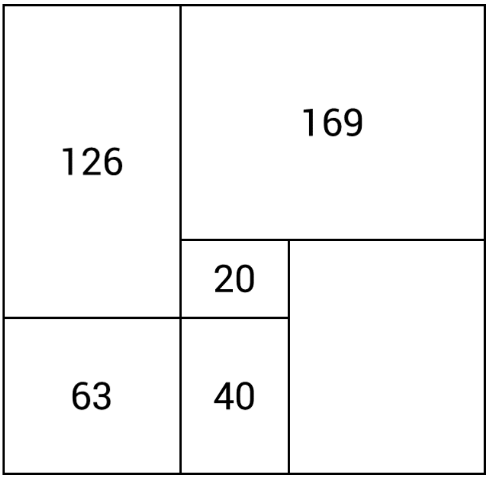
Ответ: 103.

Вариант 8.4.3. Прямоугольник разрезали на шесть меньших прямоугольников, площади пяти из них обозначены на рисунке. Найдите площадь оставшегося прямоугольника.



Ответ: 107.

Вариант 8.4.4. Прямоугольник разрезали на шесть меньших прямоугольников, площади пяти из них обозначены на рисунке. Найдите площадь оставшегося прямоугольника.



Ответ: 109.

Задача 8.5.1. В клетках таблицы 12×12 расставлены натуральные числа так, что выполнено следующее условие: для любого числа, стоящего в неугловой клетке, найдётся соседняя по стороне клетка, в которой стоит меньшее число. Какое наименьшее количество различных чисел может быть в таблице?

(Неугловыми называются клетки, находящиеся не в углу таблицы. Их ровно 140.)

Ответ: 11.

Решение. Для начала приведём пример с расстановкой 11 различных чисел.

1	2	3	4	5	6	6	5	4	3	2	1
2	3	4	5	6	7	7	6	5	4	3	2
3	4	5	6	7	8	8	7	6	5	4	3
4	5	6	7	8	9	9	8	7	6	5	4
5	6	7	8	9	10	10	9	8	7	6	5
6	7	8	9	10	11	11	10	9	8	7	6
6	7	8	9	10	11	11	10	9	8	7	6
5	6	7	8	9	10	10	9	8	7	6	5
4	5	6	7	8	9	9	8	7	6	5	4
3	4	5	6	7	8	8	7	6	5	4	3
2	3	4	5	6	7	7	6	5	4	3	2
1	2	3	4	5	6	6	5	4	3	2	1

Теперь докажем, что в любой расстановке, удовлетворяющей условию, различных чисел хотя бы 11. Будем рисовать между клетками стрелки: если в двух соседних по стороне клетках находятся различные числа, то нарисуем стрелку от большего числа к меньшему. По условию из каждой неугловой клетки выходит хотя бы одна стрелка.

Рассмотрим клетку, находящуюся в 6-й строке и 6-м столбце (одну из четырёх «центральных» клеток). Будем строить ориентированный маршрут, начинающийся в ней: будем последовательно идти из клетки по любой из стрелок, выходящих из неё. Поскольку клеток в таблице конечное количество, мы либо когда-нибудь придём в клетку, в которой уже были (очевидно, такое невозможно, ведь числа в клетках нашего маршрута постоянно уменьшаются), либо придём в угловую клетку. Но чтобы дойти до угловой клетки, необходимо не менее 5 раз сменить строку и не менее 5 раз сменить столбец, то есть сделать не менее $5+5=10$ ходов. Следовательно, наш ориентированный маршрут проходит хотя бы по 11 клеткам, и все числа в них, очевидно, различны. □

Вариант 8.5.2. В клетках таблицы 14×14 расставлены натуральные числа так, что выполнено следующее условие: для любого числа, стоящего в неугловой клетке, найдётся соседняя по стороне клетка, в которой стоит меньшее число. Какое наименьшее количество различных чисел может быть в таблице?

(Неугловыми называются клетки, находящиеся не в углу таблицы. Их ровно 192.)

Ответ: 13.

Вариант 8.5.3. В клетках таблицы 16×16 расставлены натуральные числа так, что выполнено следующее условие: для любого числа, стоящего в неугловой клетке, найдётся соседняя по стороне клетка, в которой стоит меньшее число. Какое наименьшее количество различных чисел может быть в таблице?

(Неугловыми называются клетки, находящиеся не в углу таблицы. Их ровно 252.)

Ответ: 15.

Вариант 8.5.4. В клетках таблицы 18×18 расставлены натуральные числа так, что выполнено следующее условие: для любого числа, стоящего в неугловой клетке, найдётся соседняя по стороне клетка, в которой стоит меньшее число. Какое наименьшее количество различных чисел может быть в таблице?

(Неугловыми называются клетки, находящиеся не в углу таблицы. Их ровно 320.)

Ответ: 17.

Задача 8.6.1. Чётные натуральные числа a и b таковы, что $\text{НОД}(a,b) + \text{НОК}(a,b) = 2^{23}$. Сколько различных значений может принимать $\text{НОК}(a,b)$?

Ответ: 22.

Решение. Заметим, что $\text{НОК}(a,b) \;\vdots\; \text{НОД}(a,b)$, поэтому

$$2^{23} = \text{НОД}(a,b) + \text{НОК}(a,b) \;\vdots\; \text{НОД}(a,b).$$

Отсюда следует, что $\text{НОД}(a,b)$ — это натуральный делитель числа 2^{23}.

При этом $\text{НОД}(a,b) \neq 1$ (ведь a и b — чётные числа), а также $\text{НОД}(a,b) \neq 2^{23}$ (ведь $\text{НОД}(a,b) = 2^{23} - \text{НОК}(a,b) < 2^{23}$). Таким образом, $\text{НОД}(a,b)$ принимает одно из значений $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{22}$.

Отметим, что все эти значения возможны: чтобы $\text{НОД}(a,b)$ был равен 2^k для $1 \leqslant k \leqslant 22$, достаточно выбрать $a = 2^k$ и $b = 2^{23} - 2^k$. В этом случае $b \;\vdots\; a$, поэтому $\text{НОД}(a,b) = a$ и $\text{НОК}(a,b) = b$, то есть $\text{НОД}(a,b) + \text{НОК}(a,b) = a + b = 2^{23}$. $\square$

Вариант 8.6.2. Чётные натуральные числа a и b таковы, что $\text{НОД}(a,b) + \text{НОК}(a,b) = 2^{24}$. Сколько различных значений может принимать $\text{НОК}(a,b)$?

Ответ: 23.

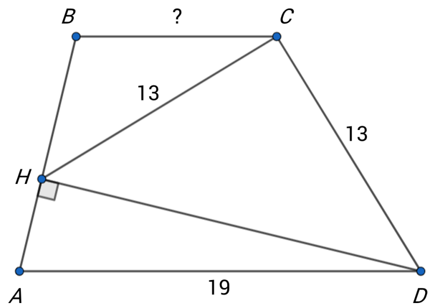
Вариант 8.6.3. Чётные натуральные числа a и b таковы, что $\text{НОД}(a,b) + \text{НОК}(a,b) = 2^{25}$. Сколько различных значений может принимать $\text{НОК}(a,b)$?

Ответ: 24.

Вариант 8.6.4. Чётные натуральные числа a и b таковы, что $\text{НОД}(a,b) + \text{НОК}(a,b) = 2^{26}$. Сколько различных значений может принимать $\text{НОК}(a,b)$?

Ответ: 25.

Задача 8.7.1. Дана трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Точка H на стороне AB такова, что $\angle DHA = 90°$. Известно, что $CH = CD = 13$ и $AD = 19$. Найдите длину отрезка BC.



Ответ: 9.5.

Решение. Продлим лучи AB и DC до пересечения в точке X (см. рисунок).

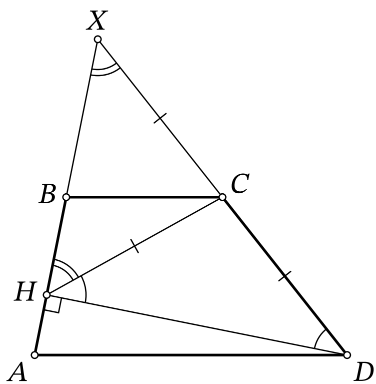
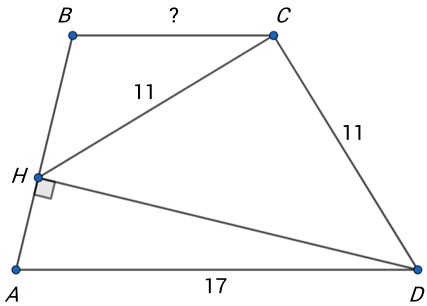


Рисунок к решению задачи 8.7.1

В равнобедренном треугольнике HCD имеем $\angle CHD = \angle CDH$. В прямоугольном треугольнике XHD имеем $\angle HXD = 90° - \angle XDH = 90° - \angle CHD = \angle XHC$.

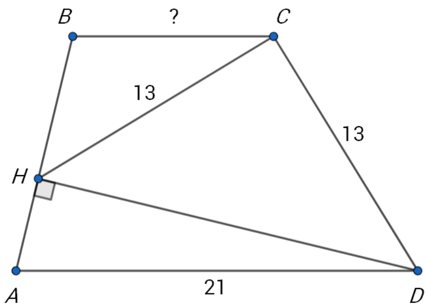
Следовательно, треугольник XHC — равнобедренный, и $CX = CH = CD$. Тогда в треугольнике AXD отрезок BC является средней линией (ведь $BC \parallel AD$, и точка C является серединой отрезка XD), поэтому $BC = \frac{1}{2}AD = 9.5$. □

Вариант 8.7.2. Дана трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Точка H на стороне AB такова, что $\angle DHA = 90°$. Известно, что $CH = CD = 11$ и $AD = 17$. Найдите длину отрезка BC.



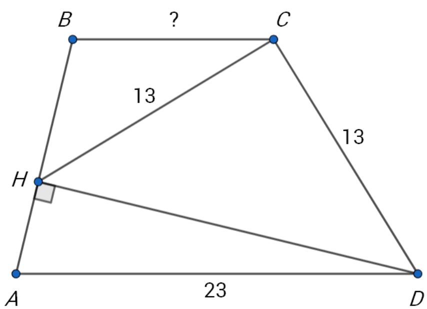
Ответ: 8.5.

Вариант 8.7.3. Дана трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Точка H на стороне AB такова, что $\angle DHA = 90°$. Известно, что $CH = CD = 13$ и $AD = 21$. Найдите длину отрезка BC.



Ответ: 10.5.

Вариант 8.7.4. Дана трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Точка H на стороне AB такова, что $\angle DHA = 90°$. Известно, что $CH = CD = 13$ и $AD = 23$. Найдите длину отрезка BC.



Ответ: 11.5.

Задача 8.8.1. Различные положительные числа a, b, c таковы, что

$$\begin{cases} a^2 + bc = 115, \\ b^2 + ac = 127, \\ c^2 + ab = 115. \end{cases}$$

Найдите $a + b + c$.

Ответ: 22.

Решение. Вычтем из первого равенства третье и преобразуем:

$$\begin{gathered} (a^2 + bc) - (c^2 + ab) = 0, \\ a^2 - c^2 + bc - ab = 0, \\ (a - c)(a + c) + b(c - a) = 0, \\ (a - c)(a + c - b) = 0. \end{gathered}$$

По условию $a \neq c$, поэтому $b = a + c$. Теперь сложим два первых равенства:

$$\begin{gathered} (a^2 + bc) + (b^2 + ac) = 115 + 127, \\ (a^2 + bc) + (b^2 + ac) = 242. \end{gathered}$$

Подставим в получившееся равенство $b = a + c$:

$$\begin{aligned} 242 = a^2 + bc + b^2 + ac = a^2 + (a + c)c + (a + c)^2 + ac = \\ = a^2 + ac + c^2 + (a + c)^2 + ac = 2(a + c)^2, \end{aligned}$$

откуда $(a + c)^2 = 121$. Поскольку числа a и c положительны и $b = a + c$, получаем, что $a + c = 11$ и $a + b + c = 22$. □

Вариант 8.8.2. Различные положительные числа a, b, c таковы, что

$$\begin{cases} a^2 + bc = 138, \\ b^2 + ac = 150, \\ c^2 + ab = 138. \end{cases}$$

Найдите $a + b + c$.

Ответ: 24.

Вариант 8.8.3. Различные положительные числа a, b, c таковы, что

$$\begin{cases} a^2 + bc = 163, \\ b^2 + ac = 175, \\ c^2 + ab = 163. \end{cases}$$

Найдите $a + b + c$.

Ответ: 26.

Вариант 8.8.4. Различные положительные числа a, b, c таковы, что

$$\begin{cases} a^2 + bc = 190, \\ b^2 + ac = 202, \\ c^2 + ab = 190. \end{cases}$$

Найдите $a + b + c$.

Ответ: 28.