

Всероссийская олимпиада школьников по математике
школьный этап 2022-2023
группа 1
Задания и решения

18 октября 2022 г.

9 класс

1. Вариант 1.

Найдите сумму:

$$(-2021) + (-2020) + (-2019) + \dots + 2023 + 2024$$

Ответ. 6069.

Решение. Объединив в пары числа, отличающиеся знаком, получим, что в каждой такой паре сумма равна 0, а без пар остались числа 0, 2022, 2023, 2024.

Вариант 2.

Найдите сумму:

$$(-2022) + (-2021) + (-2020) + \dots + 2023 + 2024$$

Ответ. 4047.

Вариант 3.

Найдите сумму:

$$(-2021) + (-2020) + (-2019) + \dots + 2022 + 2023$$

Ответ. 4045.

Вариант 4.

Найдите сумму:

$$(-2022) + (-2021) + (-2020) + \dots + 2024 + 2025$$

Ответ. 6072.

2. Вариант 1.

В некотором трёхзначном числе N переставили две последние цифры и сложили полученное число с исходным. Получилось четырёхзначное число, начинающееся на 173. Найдите наибольшую возможную сумму цифр числа N .

Ответ. 20.

Решение. Пусть исходное число \overline{abc} , а последняя цифра суммы $\overline{abc} + \overline{acb}$ равна x . $100a + 10b + c + 100a + 10c + b = 200a + 11(c + b) = 1730 + x$. Если $a < 8$, то $200a + 11(c + b) \leq 1400 + 11 \cdot (9 + 9) = 1598 < 1730 + x$. Если $a = 8$, то $200a + 11(c + b) = 1800 + 11 \cdot (b + c) > 1730 + x$.

Следовательно, $a = 8$. Поэтому $(800 + 10b + c) + (800 + 10c + b) = 1730 + x$, т. е. $11(b + c) = 130 + x$. Отсюда следует, что $x = 2$ (из чисел от 130 до 139 только 132 делится на 11). Значит, $b + c = 132/11 = 12$.
Ответ: $a + b + c = 8 + 12 = 20$.

Вариант 2.

В некотором трёхзначном числе N переставили две последние цифры и сложили полученное число с исходным. Получилось четырёхзначное число, начинающееся на 155. Найдите наибольшую возможную сумму цифр числа N .

Ответ. 21.

Вариант 3.

В некотором трёхзначном числе N переставили две последние цифры и сложили полученное число с исходным. Получилось четырёхзначное число, начинающееся на 138. Найдите наибольшую возможную сумму цифр числа N .

Ответ. 23.

Вариант 4.

В некотором трёхзначном числе N переставили две последние цифры и сложили полученное число с исходным. Получилось четырёхзначное число, начинающееся на 112. Найдите наибольшую возможную сумму цифр числа N .

Ответ. 16.

3. Вариант 1.

В посёлке проживают 7 человек. Некоторые из них лжецы, которые всегда лгут, а остальные – рыцари (всегда говорят правду). Каждый житель сказал про каждого из остальных, рыцарь он или лжец. Всего было получено 42 ответа, причем в 24 случаях житель назвал односельчанина лжецом. Какое минимальное количество рыцарей может проживать в посёлке?

Ответ. 3.

Решение. Фразу «Он – рыцарь» скажут рыцарь про рыцаря и лжец про лжеца, а фразу «Он – лжец» скажут рыцарь про лжеца и лжец про рыцаря. Следовательно, в каждой паре «рыцарь-лжец» фраза «Он – лжец» прозвучит дважды. Поскольку всего эта фраза прозвучала 24 раза, пар «рыцарь-лжец» всего 12, откуда находим, что рыцарей 3, а лжецов 4, или наоборот.

Вариант 2.

В посёлке проживают 9 человек. Некоторые из них лжецы, которые всегда лгут, а остальные – рыцари (всегда говорят правду). Каждый житель сказал про каждого из остальных, рыцарь он или лжец. Всего было получено 72 ответа, причем в 28 случаях житель назвал односельчанина лжецом. Какое максимальное количество рыцарей может проживать в посёлке?

Ответ. 7.

Вариант 3.

В посёлке проживают 9 человек. Некоторые из них лжецы, которые всегда лгут, а остальные – рыцари (всегда говорят правду). Каждый житель сказал про каждого из остальных, рыцарь он или лжец. Всего было получено 72 ответа, причем в 40 случаях житель назвал односельчанина лжецом. Какое минимальное количество рыцарей может проживать в посёлке?

Ответ. 4.

Вариант 4.

В посёлке проживают 9 человек. Некоторые из них лжецы, которые всегда лгут, а остальные – рыцари (всегда говорят правду). Каждый житель сказал про каждого из остальных, рыцарь он или лжец. Всего было получено 72 ответа, причем в 40 случаях житель назвал односельчанина лжецом. Какое максимальное количество рыцарей может проживать в посёлке?

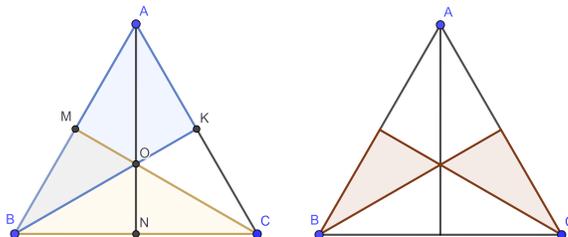
Ответ. 5.

4. Вариант 1.

Дан равносторонний треугольник ABC площади 210. Внутри него закрасили красным цветом точки, для которых вершина A является не самой ближней и не самой далёкой. Какую площадь имеет закрашенная часть треугольника?

Ответ. 41.

Решение.



Рассмотрим такую точку D , для которой вершина B является самой ближней, а вершина C – самой далёкой. Пусть M, N, K – середины сторон AB, BC и AC соответственно. O – точка пересечения медиан AN, BK, CM , которые также являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника. Т.к. точка D ближе к B , чем к A , то D лежит на сторонах или внутри треугольника CMB . Т.к. точка D ближе к A , чем к C , то D лежит на сторонах или внутри треугольника ABK . Следовательно, точка D лежит в пересечении этих треугольников, т.е. в треугольнике BOM . Аналогично, точки, для которых вершина B является самой далёкой, а вершина C – самой ближней, лежат в треугольнике COK . Т.к. $CO : OM = 2 : 1$, то площадь треугольника BOM составляет треть от площади треугольника CMB , которая составляет половину площади треугольника ABC . Поэтому площадь треугольника

$ВОМ$ равна $\frac{1}{6}$ площади треугольника ABC . Применяя аналогичные рассуждения для треугольника $СОК$, получаем окончательно, что сумма площадей треугольников $ВОМ$ и $СОК$ составляет $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ площади треугольника ABC , т.е. равна 41.

Вариант 2.

Дан равносторонний треугольник ABC площади 129. Внутри него закрасили красным цветом точки, для которых вершина A является не самой ближней и не самой далекой. Какую площадь имеет закрашенная часть треугольника?

Ответ. 43.

Вариант 3.

Дан равносторонний треугольник ABC площади 201. Внутри него закрасили красным цветом точки, для которых вершина A является не самой ближней и не самой далекой. Какую площадь имеет закрашенная часть треугольника?

Ответ. 67.

Вариант 4.

Дан равносторонний треугольник ABC площади 216. Внутри него закрасили красным цветом точки, для которых вершина A является не самой ближней и не самой далекой. Какую площадь имеет закрашенная часть треугольника?

Ответ. 72.

5. Вариант 1.

Какую наименьшую сумму могут иметь девять последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 3040102?

Ответ. 83040102.

Решение. Сумма девяти последовательных натуральных чисел $n + n + 1 + \dots + n + 8 = 9n + 36$ кратна 9. Сумма цифр $3 + 0 + 4 + 0 + 1 + 0 + 2$ при делении на 9 дает остаток 1. Следовательно, нужно добавить цифру 8.

Вариант 2.

Какую наименьшую сумму могут иметь девять последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 2050306?

Ответ. 22050306.

Вариант 3.

Какую наименьшую сумму могут иметь девять последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 1020156?

Ответ. 31020156.

Вариант 4.

Какую наименьшую сумму могут иметь девять последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 1230456?

Ответ. 61230456.

6. Вариант 1.

Какой наибольший корень может иметь уравнение

$$(x - a)(x - b) = (x - c)(x - d),$$

если известно, что $a + d = b + c = 2022$, а числа a и c различны?

Ответ. 1011.

Решение. Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, найдём $x = \frac{cd-ab}{c+d-a-b}$. Заметим, что $c + d - a - b \neq 0$, так как иначе $c + d = a + b$, и с учётом равенства $a + d = b + c$ получим $a = c$.

Учитывая, что $d = 2022 - a$, $c = 2022 - b$, $x = \frac{2022^2 - 2022a - 2022b}{2(2022 - a - b)} = \frac{2022}{2} = 1011$.

Вариант 2.

Какой наибольший корень может иметь уравнение

$$(x - a)(x - b) = (x - c)(x - d),$$

если известно, что $a + d = b + c = 1234$, а числа a и c различны?

Ответ. 617.

Вариант 3.

Какой наибольший корень может иметь уравнение

$$(x - a)(x - b) = (x - c)(x - d),$$

если известно, что $a + d = b + c = 1122$, а числа a и c различны?

Ответ. 561.

Вариант 4.

Какой наибольший корень может иметь уравнение

$$(x - a)(x - b) = (x - c)(x - d),$$

если известно, что $a + d = b + c = 3322$, а числа a и c различны?

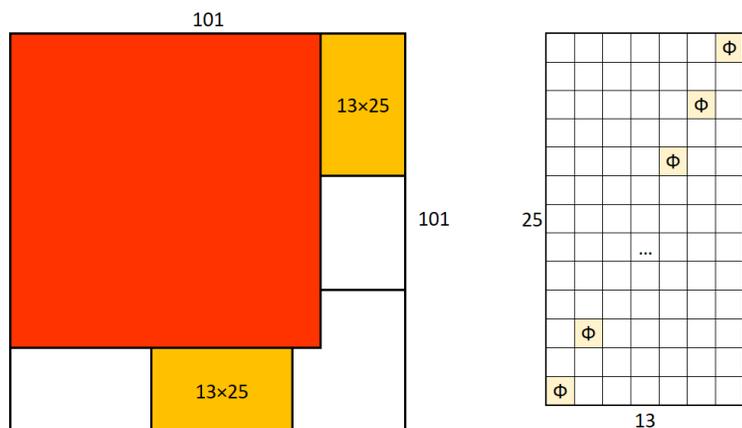
Ответ. 1661.

7. Вариант 1.

В квадрате 101×101 угловой квадрат 88×88 закрашен красным цветом. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ферзей удастся поставить на доску, не размещая фигуры на красных клетках? *Ферзь бьёт по горизонтали, по вертикали и параллельно диагоналям квадрата. Бить через закрашенные клетки можно.*

Ответ: 26.

Решение. Рассмотрим 13 горизонтальных и 13 вертикальных полос размером 1×101 , не содержащих красных клеток. Любой из ферзей стоит хотя бы на одной из этих полос, и ни на какой из полос не может стоять более одного ферзя, поэтому ферзей не более 26. Для построения примера рассмотрим два прямоугольника 13×25 (см. рисунок) и в каждом из них расставим ферзей согласно указанной на рисунке схеме.



Вариант 2.

В квадрате 96×96 угловой квадрат 85×85 закрашен красным цветом. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ферзей удастся поставить на доску, не размещая фигуры на красных клетках? Ферзь бьёт по горизонтали, по вертикали и параллельно диагоналям квадрата. Бить через закрашенные клетки можно.

Ответ: 22.

Вариант 3.

В квадрате 102×102 угловой квадрат 84×84 закрашен красным цветом. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ферзей удастся поставить на доску, не размещая фигуры на красных клетках? Ферзь бьёт по горизонтали, по вертикали и параллельно диагоналям квадрата. Бить через закрашенные клетки можно.

Ответ: 36.

Вариант 4.

В квадрате 103×103 угловой квадрат 84×84 закрашен красным цветом. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ферзей удастся поставить на доску, не размещая фигуры на красных клетках? Ферзь бьёт по горизонтали, по вертикали и параллельно диагоналям квадрата. Бить через закрашенные клетки можно.

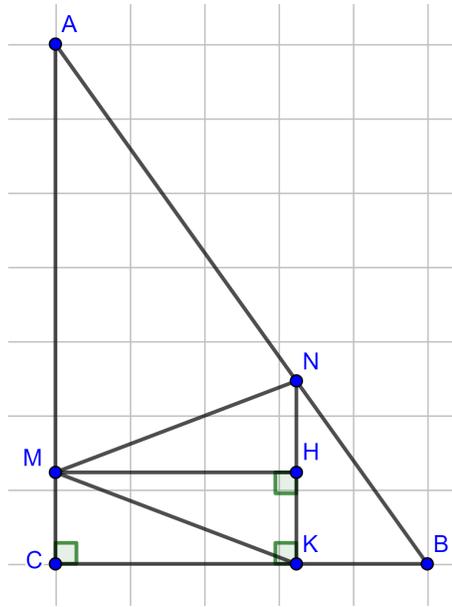
Ответ: 38.

8. Вариант 1.

Прямая, параллельная катету AC прямоугольного треугольника ABC , пересекает катет BC в точке K , а гипотенузу AB – в точке N . На катете AC выбрана точка M так, что $MK = MN$. Найдите отношение $\frac{AM}{MC}$, если $\frac{BK}{BC} = 14$.

Ответ: 7.

Решение.



Опустим высоту MN из точки M в равнобедренном треугольнике MNK . Тогда $MHNC$ – прямоугольник и $MC = KN = HN$. Обозначим $MC = KN = HN = y$. Обозначим $KB = x$, тогда $CK = CB - KB = 4x - x = 3x$. Из подобия треугольников NKB и ACB следует, что $\frac{AC}{CB} = \frac{NK}{KB}$. Тогда, $\frac{AC}{4x} = \frac{2y}{x}$. Следовательно, $AC = 8y$. Получаем, что $\frac{AM}{MC} = \frac{8x-x}{x} = 7$.

Вариант 2.

Прямая, параллельная катету AC прямоугольного треугольника ABC , пересекает катет BC в точке K , а гипотенузу AB – в точке N . На катете AC выбрана точка M так, что $MK = MN$. Найдите отношение $\frac{AM}{MC}$, если $\frac{BK}{BC} = 16$.

Ответ: 11.

Вариант 3.

Прямая, параллельная катету AC прямоугольного треугольника ABC , пересекает катет BC в точке K , а гипотенузу AB – в точке N . На катете AC выбрана точка M так, что $MK = MN$. Найдите отношение $\frac{AM}{MC}$, если $\frac{BK}{BC} = 15$.

Ответ: 9.

Вариант 4.

Прямая, параллельная катету AC прямоугольного треугольника ABC , пересекает катет BC в точке K , а гипотенузу AB – в точке N . На катете AC выбрана точка M так, что $MK = MN$. Найдите отношение $\frac{AM}{MC}$, если $\frac{BK}{BC} = 13$.

Ответ: 5.