Школьный этап ВСОШ по математике, 2022-2023 учебный год, 9 класс.

1.1. *Группа туристов вышла на маршрут со стоянки. Через 15 минут турист Иван вспомнил, что забыл на стоянке фонарик, и пошёл за ним обратно со скоростью большей, чем у основной группы. Забрав фонарик, он стал догонять группу с той же повышенной скоростью и сделал это только спустя 2,5 часа после того, как ушёл за фонариком. Считая скорости движения группы и Ивана вне группы постоянными, найдите, во сколько раз скорость Ивана больше скорости группы. Ответ запишите целым числом или десятичной дробью.*

Ответ: 1.2

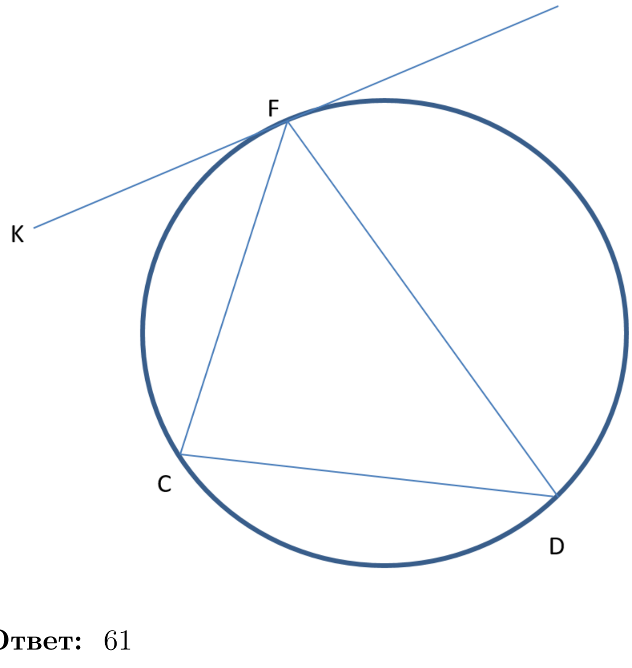
Решение. Пусть за 15 минут Иван вместе с группой прошёл расстояние x. Тогда за 2,5 часа, что составляет 150 минут, группа без Ивана прошла $10x$. Ивану за это же время пришлось пройти $12x$, так как он прошёл всё то же, что группа, и дважды расстояние x, отделявшее его от забытого фонарика. Тем самым, за одно и то же время Иван прошел в $12x/10x = 1,2$ раза больше, значит, его скорость была во столько же раз больше.

2.1. *У Марфы-рукодельницы в шкатулке лежит много булавок. В первый раз она достала оттуда две булавки, а в каждый последующий — на k булавок больше, чем в предыдущий. Оказалось, что в десятый раз она достала больше 45 булавок, а в пятнадцатый — меньше 90. Запишите все возможные k.*

Ответ: 5, 6 (Все ответы)

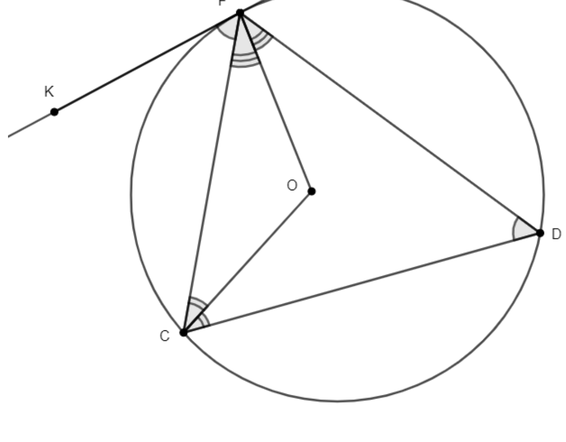
Решение. Число булавок, которые достает Марфа на n-м шаге, выражается линейной функцией $2 + k \cdot (n-1)$. Поэтому справедливы неравенства $2 + 9 \cdot k > 45$ и $2 + 14 \cdot k < 90$. Отсюда имеем $\frac{43}{9} < k < \frac{44}{7}$, что даёт натуральные значения $k = 5$ и $k = 6$.

3.1. *К описанной около треугольника FDC окружности проведена касательная FK, причём $\angle KFC = 58°$. Точки K и D лежат по разные стороны от прямой FC, как и показано на рисунке. Найдите острый угол между биссектрисами углов CFD и FCD. Ответ выразите в градусах.*



Ответ: 61

Решение. Обратимся к картинке:



$\angle KFC$ — угол между хордой и касательной, он равен половине дуги FC, как и опирающийся на неё вписанный угол $\angle FDC$. Пусть O — точка пересечения биссектрис $\triangle FCD$. Тогда $\angle FOC = 180° - (\angle FCO + \angle CFO) = 180° - \frac{1}{2}\cdot(\angle FCD + \angle CFD) = 180° - \frac{1}{2}\cdot(180° - \angle FDC) = 90° + \frac{1}{2}\angle FDC = 90° + 29° = 119°$. А искомый острый угол составляет $180° - 119° = 61°$.

Замечание. O не является центром описанной окружности.

4.1. *Среди пятидесяти подряд идущих натуральных чисел ровно 8 делятся на 7 без остатка. Какой остаток при делении на 7 даёт одиннадцатое по счёту число?*

Ответ: 3

Решение. Ближайшие числа, дающие одинаковый остаток при делении на 7, отличаются на 7. Значит, среди пятидесяти подряд идущих чисел образуется 6 групп чисел с одинаковым остатком, содержащих по 7 чисел, и только одна группа, содержащая 8 чисел, причём среди них как раз первое и последнее. Таким образом, именно первое число делится на 7 без остатка. тогда одиннадцатое число дает при делении на 7 тот же остаток, что и четвёртое, и он равен 3.

5.1. *Для действительных чисел a и b известно, что $ab = 5$, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 0,6$. Запишите все возможные значения $a + b$.*

Ответ: 5, -5 (Все ответы)

Решение. Преобразуем данные условия: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{a^2b^2} = \frac{(a+b)^2 - 10}{25} = 0,6$. Тогда $(a+b)^2 = 0,6 \cdot 25 + 10 = 25$. Значит, искомая величина равна 5 или -5.

Эта ситуация возможна, так как можно составить квадратное уравнение по найденной сумме и известному произведению величин a и b, для которого они являются корнями: $x^2 - 5x + 5 = 0$ или $x^2 + 5x + 5 = 0$, и в обоих случаях это уравнение корни имеет.

6.1. *Четыре шахматиста — Иванов, Петров, Васильев и Кузнецов — сыграли однокруговой турнир (каждый с каждым по одной партии). За победу даётся 1 очко, за ничью — по 0,5 каждому. Оказалось, что у занявшего первое место 3 очка, а у занявшего последнее — 0,5. Сколько существует вариантов распределения очков у названных шахматистов, если некоторые из них могли набрать равное количество очков? (Например, варианты, когда у Иванова — 3, а у Петрова — 0.5, и когда у Петрова — 3, а у Иванова — 0.5, считаются различными!)*

Ответ: 36

Решение. Сначала выясним, какие количества очков могут быть у четырёх участников в приведённых условиях. Так как занявший первое место имеет 3 очка, он выиграл у всех, и занимающий второе место не мог набрать больше 2, так как первому он проиграл. Всего в турнире было 6 партий, значит, и разыграно 6 очков (при любом исходе партии в ней разыгрывается 1 очко), тогда на второго и третьего в сумме приходится $6 - 3 - 0,5 = 2,5$ очка. Тогда они могли набрать 2 и 0,5 либо 1,5 и 1 очко. В первом случае надо найти число способов распределить между четырьмя данными шахматистами очки 3; 2; 0,5 и 0,5. Это возможно сделать $4 \cdot 3 = 12$ способами, так как на первом месте окажется любой из четверых, на втором — любой из троих оставшихся, а далее выбора нет. Во втором же случае способов будет $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, поскольку здесь количество очков разное у всех. В итоге получаем $12 + 24 = 36$ способов распределения очков.

7.1. *По кругу стоят люди — лжецы, которые всегда врут, и рыцари, всегда говорящие правду. И каждый из них сказал, что из людей, стоящих с ним рядом, лжецов и рыцарей поровну. Сколько всего людей, если рыцарей 48?*

Ответ: 72

Решение. Обозначим рыцаря Р, лжеца — Л. Заметим, что каждый рыцарь стоит между рыцарем и лжецом, иначе он сказал бы неправду. Значит, рыцари стоят группами по двое. Лжецы не могут стоять группами более чем из одного человека, так как в таком случае лжец, стоящий с краю группы сказал бы правду. Значит, чередуются группы из двух рыцарей и одного лжеца: ...РРЛРРЛРРЛ.... Так как рыцарей 48, то лжецов 24. Таким образом, всего 72 человека.

8.1. *Параллелограмм $ABCD$ сложили по диагонали BD так, что вершина C осталась на месте, а вершина A заняла положение A'. Отрезки BC и $A'D$ пересеклись в точке K, причём $BK : KC = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника $A'KC$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 27.*

Ответ: 3,6

Решение. В результате описанного в условии действия $\triangle ABD$ подвергся симметрии относительно прямой BD и перешел в $\triangle A'BD$. Тогда $A'D = AD = BC$, $A'B = AB = CD$. Отсюда $\triangle A'BD = \triangle CDB$ по трем сторонам. Но тогда равны высоты этих треугольников, проведенные из соответствующих вершин A' и C. Поэтому $A'C \parallel BD$, причем BC и $A'D$ пересекаются в точке K - не в середине BC, откуда $BA'CD$ — трапеция. Тогда треугольники $A'KC$ и BKD подобны с коэффициентом $2/3$. При этом $S_{BKD} = \dfrac{3}{5} S_{BCD}$, так как у них общая высота и $BK = \dfrac{3}{5} BC$. Тогда $S_{A'KC} = \dfrac{4}{9} S_{BKD} = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{5} S_{BCD} = = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 27 = 3,6$.