## 9 класс

1. В интернет-магазине продаются новогодние подарки двух видов. Подарок первого вида содержит игрушку, 3 шоколадных и 15 карамельных конфет и стоит 350 рублей. Подарок второго вида содержит 20 шоколадных и 5 карамельных конфет и стоит 500 рублей. Евгений хочет купить одинаковое количество карамельных и шоколадных конфет, причем именно эти конфеты продаются только в вышеуказанных подарочных наборах. Какую наименьшую ненулевую сумму денег ему придется потратить?

   **Ответ:** 3750 рублей.

   **Решение.** Рассмотрим целочисленные значения $m$ и $n$ – количества купленных подарочных наборов конфет соответственно 1-го и 2-го типов. Это количество должно удовлетворять условиям задачи: суммарно в них одинаковое количество карамельных и шоколадных конфет, и это количество наименьшее из всех возможных по условию. Тогда, удовлетворяя условиям задачи, составим уравнение на неизвестные величины:
$$3m + 20n = 15m + 5n,$$
решая которое как уравнение в целых числах, получим соотношение
$$5n = 4m,$$
откуда получим ненулевое решение $n = 4k, m = 5k, k \in \mathbb{N}$. Наименьшее решение будет при $k = 1$. То есть, $m = 5, n = 4$. Тогда, наименьшая стоимость такого количества подарков будет стоить $350m + 500n = 350 \cdot 5 + 500 \cdot 4 = 3750$ рублей.

   **Замечания к оцениванию.** Ответ без обоснования – 0 баллов. Подбор значений количества подарочных наборов без обоснования минимальности – 2 балла. Составлено уравнение на количество наборов и конфет и сделан анализ решений – 3 балла.

2. Существуют ли 2023 целых числа таких, что их произведение равно 2023, а их сумма равна нулю?

   **Ответ:** Нет, не существует.

   **Решение.** Докажем, что такое невозможно. Рассмотрим набор из 2023-х целых чисел. Так как количество чисел нечётно, то их сумма является чётным числом тогда и только тогда, когда количество нечётных чисел в сумме является чётным числом. Рассмотрим возможные делители числа 2023 – из них можно составить необходимое произведение. Заметим, что так как число 2023 – нечётное, то все его целые делители являются нечётными числами. Таким образом, в сумме 2023-х слагаемых – все нечётные числа, откуда сама сумма – нечётна. Что является противоречием с условием задачи, так как число ноль – чётное число.
К сведению, разложение числа $2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17$ на множители. Возможны решения, использующие представление целого числа 2023 в виде разложения на множители, среди которых есть целые числа $\pm 1$, $\pm 7$, $\pm 17, \pm 119, \pm 289, \pm 2023$. Заметим, что для доказательства невозможности существования набора чисел необходимо проверить все возможные варианты из набора приведённых. Например, один из них: $7, 17, 17, 1, \dots, 1, -1, \dots, -1$.

**Замечания к оцениванию.** Ответ без обоснования – 0 баллов. Если для обоснования невозможности существования набора чисел используются свойства чётности/нечётности суммы чётных и нечётных чисел – 2 балла. Замечено при доказательстве невозможности, что у нечётного числа 2023 есть только нечётные делители – 2 балла. В случае перебора набора чисел из $\pm 1,\ \pm 7,\ \pm 17, \pm 119, \pm 289, \pm 2023$ оценивать полный перебор вариантов полным баллом. В противном случае(перебор не полный) – 2 балла.

3. Известно, что у квадратного трехчлена $x^2 + bx + c$ есть два различных корня. Если сложить коэффициенты $b$ и $c$ и два корня (четыре числа), то получим число $-3$, а если перемножить эти же четыре числа, то получим число $36$. Найдите все такие квадратные трехчлены.

**Ответ:** $x^2 + 4x - 3$, единственный трёхчлен.

**Решение.** Рассмотрим корни квадратного трёхчлена $x^2 + bx + c$. Обозначим их как $x_1$ и $x_2$. Тогда, по условию задачи имеем пару соотношений:

$$\begin{cases} b + c + x_1 + x_2 = -3, \\ b \cdot c \cdot x_1 \cdot x_2 = 36, \end{cases}$$

где, применяя теорему Виета для приведённого квадратного уравнения ($x_1 + x_2 = -b,\ x_1 \cdot x_2 = c$), получим

$$\begin{cases} b + c - b = -3, \\ b \cdot c \cdot c = 36, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} c = -3, \\ b = 4. \end{cases}$$

Итак, единственным решением задачи является квадратный трёхчлен $x^2 + 4x - 3$. Заметим, что корни такого квадратного трёхчлена являются числами $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{7}$. Возможны решения, в которых корни квадратного трёхчлена выражены через его коэффициенты $b$ и $c$ (или наоборот).

**Замечания к оцениванию.** Ответ без обоснования – 0 баллов. Если при составлении соотношений на 4 числа использована теорема Виета или выражение корней квадратного трёхчлена – 2 балла. Полностью обоснованный ответ – полный балл.

4. Имеется клетчатая доска размером $22 \times 23$. В каждой клетке доски стоит по одной шашке. За один ход можно выбрать какие-то две шашки, и каждую из них переместить на соседнюю с ней по стороне клетку. Если на какой-то клетке оказалось хотя бы две шашки, то с этой клетки можно снять ровно две из находящихся на ней шашек. Можно ли при помощи нескольких таких ходов снять с доски все шашки?

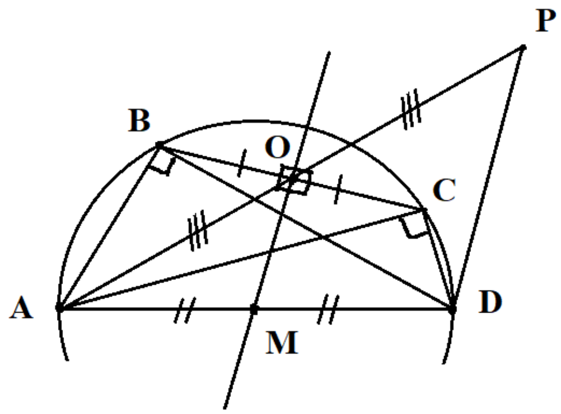
**Ответ:** Нет, невозможно.

**Решение.** Докажем методом «от противного», что невозможно снять все шашки с поля. Допустим, что можно снять все шашки с доски после нескольких ходов. Раскрасим все клетки доски в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. Допустим, для определенности, верхний левый угол будет чёрным полем. Количество белых и чёрных клеток поровну(по $11 \times 23 = 253$ штук). Будем говорить, что шашка «чёрная», если она находится на чёрной клетке и «белая» – если стоит на белой клетке. Первоначально количество «чёрных» и «белых» шашек по 253 штуки. Заметим теперь, что если мы выбранную шашку перемещаем на соседнюю клетку по правилам задачи, то она обязательно меняет свой цвет на противоположный («белый» на «чёрный» и наоборот). Так как ход игры состоит из перемещения сразу двух шашек на доске, то после хода сохранится нечётность количества «чёрных» и «белых» шашек на доске. Действительно, при любом перемещении двух шашек, например, с двух «одноцветных» клеток – количество шашек одного и другого цвета поменяется на 2 (каких-то станет больше на 2, каких-то меньше на 2), при перемещении с двух разноцветных клеток – количество не изменится. Таким образом, количество «чёрных» и «белых» шашек после любого хода остаётся нечётным числом.

Далее заметим, что если в какой-то клетке доски находятся несколько шашек, то можно снять с этой клетки две шашки (заметим, обе – одинакового цвета). При этом, количество шашек этого же цвета, находящихся на доске, уменьшится на 2, то есть количество оставшихся на доске «чёрных» и «белых» шашек нечётно. Итак, после каждого хода и возможного снятия шашек количество «чёрных» и «белых» шашек на доске нечётно. По предположению, после нескольких ходов на доске не останется ни одной шашки, в нашем случае – ни «чёрных», ни «белых» шашек. То есть, их количество в случае такого окончания игры – чётное. Противоречие. Следовательно, допущение о возможности снять все шашки с доски – неверно.

**Замечания к оцениванию.** Ответ без обоснования – 0 баллов. Доказательство на частных примерах – 0 баллов. При решении с помощью шахматной раскраски и инварианта: замечено и доказано, что количество шашек на чёрных и белых клетках доски является нечётным количеством – 3 балла.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали $AC$ и $BD$ перпендикулярны соответствующим сторонам: $BD \perp AB$ и $AC \perp CD$. Точка $O$ – середина стороны $BC$. Точка $P$ выбрана так, что точка $O$ является серединой отрезка $AP$. Докажите, что прямые $BC$ и $PD$ перпендикулярны.




**Решение.** При рассмотрении конфигурации треугольников $ABD$ и $ACD$ заметим, что оба они как прямоугольные, опираются на одну и ту же сторону – отрезок $AD$, лежащий против прямых углов $\angle ABD$ и $\angle ACD$. Заметим тогда, что через вершины четырёхугольника $ABCD$ можно провести окружность, так как два прямых (равных) угла опираются на одну сторону(хорду). Тогда, середина стороны $AD$ является центром этой окружности. Обозначим центр окружности точкой $M$. Рассматривая хорду $BC$ окружности, проведём серединный перпендикуляр к ней. Заметим, что серединный перпендикуляр проходит через точку $O$. По свойству серединного перпендикуляра к хорде окружности, перпендикуляр проходит через центр окружности точку $M$. Таким образом, $OM \perp BC$. Рассмотрим теперь треугольник $APD$. Отрезок $OM$ является средней линией в нём, так как проходит через середины его сторон. Следовательно, $OM \perp PD$. Теперь легко доказать, что $BC \perp PD$, так как $BC$ является секущей при параллельных прямых и перпендикулярна одной из них, а следовательно, перпендикулярна и второй.

**Замечания к оцениванию.** Ответ без обоснования – 0 баллов. Доказательство на частных случаях – 0 баллов. Доказано, что отрезок, соединяющий середины сторон $AD$ и $BC$ четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярен стороне $BC$ – 2 балла. Доказано, что четырёхугольник $ABCD$ – вписанный в окружность – 1 балл.

6. Студия школьного танца подсчитала, что выступала в этом году с танцем "Хоровод" уже 40 раз, причем в каждом выступлении участвовало ровно 10 человек и любые два танцора выступали вместе не более одного раза. Докажите, что в студии обучаются не менее 60 танцоров.

**Решение.** <u>Первое решение.</u> По условию задачи, любые два танцора могли встретиться не более чем на одном выступлении. Будем считать двух таких танцоров парой. Рассмотрим любое выступление: из 10 участников выступления можно образовать не более $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ пар (количество «рукопожатий», $C_{10}^2 = 45$). Так как всего выступлений было 40, то из всех их участников можно образовать не менее $45 \cdot 40 = 1800$ пар. Рассмотрим коллектив из 60 танцоров. Из 60 человек можно образовать не более $\frac{60\cdot 59}{2} = 30 \cdot 59 = 1770$ пар, что меньше, чем $1800$. Таким образом, в коллективе не менее 60 танцоров.

<u>Второе решение.</u> Методом «от противного». Допустим, коллектив студии состоит из $N$ танцоров, где $N < 60$. Тогда, по принципу Дирихле для среднего арифметического количества участия танцоров в выступлениях, имеем $\frac{10\cdot 40}{N} = \frac{400}{N} > \frac{400}{60} > 6$, а значит, найдется хотя бы один танцор, который участвовал не менее, чем в семи выступлениях. Тогда, по условию задачи, в этих выступлениях он встречался со всеми их участниками ровно один раз, то есть не менее, чем с $7 \cdot 9 = 63$ разными танцорами. Противоречие, так всего их было не более 60.

**Замечания к оцениванию.** Ответ без обоснования – 0 баллов. Доказательство на частных случаях – 0 баллов.