Условия и решения задач

(муниципальный этап олимпиады 2022 г.)

9 класс

1. Докажите, что для любых действительных чисел (x, y) выполняется неравенство:

$$|x+y|+|1-x|+|1-y| \geq 2.$$

Доказательство. Чтобы доказать неравенство, можно рассмотреть случаи: все возможные комбинации знаков выражений $x+y$, $1-x$ и $1-y$. Впрочем, можно сделать проще – воспользоваться неравенством $|a| \geq a$, которое оправдывается для произвольного действительного числа *a*:

$$|x+y|+|1-x|+|1-y| \geq (x+y)+(1-x)+(1-y)=2.$$

2. Для каких цифр a, b, c пятизначные числа $\overline{abccc}$ и $\overline{aabbb}$ являются последовательными натуральными числами.

Решение. Если число заканчивается не на 9, то при добавлении 1, меняется лишь последняя цифра. Таким образом, надо рассмотреть лишь варианты $c=9$ или $b=9$. Очевидно тогда, $b=0$ и $c=0$ соответственно.

Если $c=9$, то должно выполняться равенство: $\overline{a0999}+1=\overline{aa000}$. Тогда цифра десятков числа, стоящего в правой части данного равенства должна быть 1, то есть $a=1$ и мы имеем такое равенство:

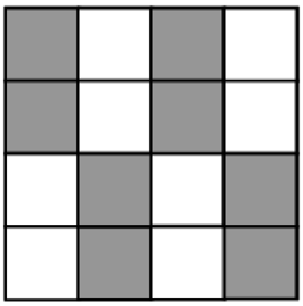
$$10999 + 1 = 1100.$$

Если $b=9$, то должно выполняться равенство: $\overline{aa999}+1=\overline{a9000}$. Тогда цифра десятков числа, стоящего в левой части данного равенства должна быть 8, то есть $a=8$ и мы имеем такое равенство: 88999 + 1 = 89000.

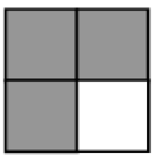
Ответ: $a=1, b=0, c=9$ или $a=8, b=9, c=0$.

3. В квадрате размером клеток некоторые клетки закрашены в черный цвет. При этом оказалось, что ни одна черная клетка не имеет смежной стороны больше чем с одной другой черной клеткой? Какое наибольшее количество клеток могло быть закрашено в черный цвет?

Решение. Пример, что должным образом можно закрасить 8 квадратиков изображен на рис. 1а. Предположим, что было закрашено более, чем 8, тогда, по крайней мере, в одном из четырех квадратов 2×2 было закрашено не менее трех клеток (рис. 1б). Но тогда хотя бы одна из них имеет смежные стороны с двумя другими черными клетками. Полученное противоречие завершает доказательство.



а)



б)

Рис. 1

Ответ: 8.

4. На диагонали *BD* параллелограмма *ABCD* выбранные точки *P* и *Q* таким образом, что $BP = PQ = QD$. Прямые *CP* и *CQ* пересекающие стороны *AB* и *AD* соответственно в точках *M* и *N*. Найдите отношение $MN : BD$.

Решение. Проведем диагональ AC, тогда точка пересечения диагоналей O – делит обе диагонали пополам (рис. 2). Тогда для ΔABC отрезок BO – медиана, а точка P удовлетворяет условию $BP : PO = 2 : 1$, то есть P – точка пересечения медиан ΔABC. Поэтому CM – также медиана ΔABC, а потому M – середина стороны AB, аналогично N – середина стороны AD. Поэтому CN - средняя линия ΔABD, отсюда и следует, что $MN : BD = 1 : 2$.

Ответ: $MN : BD = 1 : 2$.

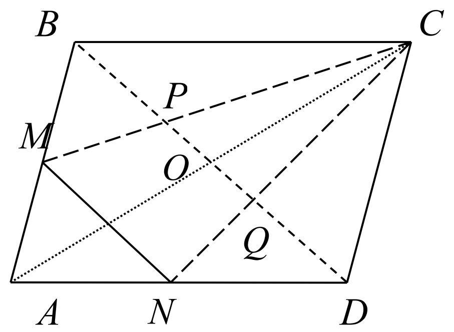


Рис. 2

5. Для функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ выполняется условие $5a + b + 2c = 0$. Докажите, что уравнение $f(x) = 0$ имеет два корня.

Решение. Заданное условие можно переписать в таком виде:

$$5a + b + 2c = 0 \Leftrightarrow a - b + c + 4a + 2b + c = 0.$$

А последнее равенство – в виде $f(-1) + f(2) = 0$. Таким образом, либо $f(-1) = f(2) = 0$ и парабола имеет два действительных корня, либо эти значения имеют разные знаки, откуда также следует, что она имеет два действительных корня. Что и требовалось доказать.