Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2022-2023 учебный год

Решения задач и критерии оценивания. 9 класс

9.1 *В клетчатом квадрате 7×7 отметили несколько клеток, причём в каждом столбце и каждой строке хотя бы по одной клетке. Оказалось, что в любой строке квадрата отмечено чётное число клеток, а в любом столбце число отмеченных делится на 3. Какое наименьшее и наибольшее количество клеток таблицы могло быть отмечено?*

Решение: начнём с оценки снизу. Просуммировав число клеток в каждой строке, получим, что общее число клеток в таблице чётно. Суммируя по столбцам, получаем также, что общее число клеток делится на 3. Тогда оно делится на на 6. Так как сумма по столбцам хотя бы $3\cdot 7 = 21$ и делится на 6, то она хотя бы 24.

Оценка сверху: заметим, что в каждой строке отмечено не более 6 клеток. Тогда всего отмеченных клеток не более 42.

Примеры, реализующие две оценки, приведены ниже.

X	X				X	X
X	X				X	X
X	X				X	X
		X	X			
		X	X	X	X	
		X	X	X	X	
				X	X	

	X	X	X	X	X	X
X		X	X	X	X	X
X	X		X	X	X	X
X	X	X		X	X	X
X	X	X	X		X	X
X	X	X	X	X		X
X	X	X	X	X	X	

Критерии:

- Оценка и пример на 24 клетки — 2 и 3 балла соответственно (баллы суммируются);
- Оценка и пример на 42 клетки — 1 и 1 балла соответственно (баллы суммируются между собой и с предыдущим критерием).

9.2 *В ловлю покемонов играли 11 взрослых и n детей. Вместе они поймали n^2+3n-2 покемона, причём все взрослые поймали поровну, и все дети поймали поровну, но каждый на 6 меньше, чем взрослый. Сколько детей участвовало в игре?*

Решение: Пусть каждый ребёнок поймал m покемонов. Тогда $nm+11(m+6)=n^2+3n-2$. Отсюда $(n+11)m=n^2+3n-68$. Значит, правая часть делится на $n+11$. Имеем $n^2+3n-68 = n(n+11)-8(n+11)+20$, поэтому 20 делится на $n+11$. Единственный делитель числа 20, больший 10 — это само число 20, поэтому $n+11=20, n=9$.

Критерии:

- За отсутствие примера для $n=9$ баллы не снижаются.
- Показано, что $n=9$ подходит, но не доказано, что других вариантов нет — 1 балл.

9.3 *На доске нарисовали остроугольный $\triangle ABC$, отметили основания высот A_1 и B_1, а также середину C_1 стороны AB. Затем весь чертёж стёрли, кроме точек A_1, B_1 и C_1. Можно ли восстановить исходный $\triangle ABC$?*

Решение 1: Рассмотрим произвольный остроугольный $\triangle ABC$ с углом $\angle C = 60^\circ$. Поскольку углы $\angle AA_1B$ и $\angle BB_1A$ прямые, четырёхугольник AB_1A_1B вписанный и $\angle A_1B_1C = \angle ABC$. Тогда треугольники ABC и A_1B_1C подобны с коэффициентом $\frac{A_1C}{AC} = \cos\angle C = \frac{1}{2}$, откуда $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$. Но B_1C_1 и A_1C_1 — медианы в прямоугольных треугольниках с гипотенузой AB, поэтому $B_1C_1 = C_1A_1 = \frac{AB}{2}$. Тогда если $\triangle A_1B_1C_1$ правильный, невозможно восстановить значения углов при вершинах A и B.

Решение 2: Заметим, что $A_1C_1 = B_1C_1 = \frac{AB}{2}$. Проведём в окружности с центром C_1 произвольный диаметр $A'B'$ такой, что точки на окружности идут в порядке $A'-B_1-A_1-B'$. Пусть лучи $A'B_1$ и $B'A_1$ пересекаются в точке C'. Тогда в треугольнике $A'B'C'$ точка C_1 — середина

$A'B'$, а углы $\angle A'A_1B'$ и $\angle B'B_1A'$ — прямые как опирающиеся на диаметр, значит, $\triangle A'B'C'$ один из подходящих. Поскольку диаметр можно провести бесконечным числом способов, то таких подходящих треугольников много, и восстановить исходный невозможно.

Решение 3: Проведём построение для произвольного неравнобедренного $\triangle ABC$. Поскольку $A_1C_1 = B_1C_1$, симметрия относительно серединного перпендикуляра l к прямой A_1B_1 оставляет на месте точку C и меняет местами точки A_1 и B_1. Тогда у треугольника $\triangle A'B'C'$, где точки A', B', C' симметричны соответственно точкам B, A, C относительно прямой l, точки A_1, B_1, C_1 находятся на тех же местах, что и у $\triangle ABC$, при этом два треугольника не могут совпасть.

Критерии:

- Замечено, что $A_1C_1 = B_1C_1$ — 1 балл;
- Соотношение $A_1B_1 = AB\cos\angle C$ принимается без доказательства;
- Приведено построение только одного из подходящих треугольников — 1 балл.

$\boxed{\mathbf{9.4}}$ *Найдутся ли три таких иррациональных числа, что их сумма и произведение являются целыми числами?*

Решение 1: Возьмём числа $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}, -2\sqrt[3]{2}$. Их сумма равна 0, а произведение равно -4.

Решение 2: Рассмотрим многочлен $f(x) = x^3 - 30x^2 + 31x - 1$. Поскольку $f(0) < 0, f(1) > 0, f(2) < 0, f(100) > 0$, уравнение $f(x) = 0$ имеет три вещественных корня. Числа ± 1 не являются корнями, поэтому все корни уравнения иррациональны. При этом по теореме Виета их сумма равна 30, а произведение равно -1.

Критерии:

- Неочевидна иррациональность приведённых чисел и/или целостность их суммы и произведения — снимается до 3 баллов;
- Числа приводятся как корни многочлена, но не проверяется, что этот многочлен имеет три иррациональных корня — не более 3 баллов;
- Утверждение “корень целой степени из целого числа — число либо целое, либо иррациональное” и следствия из него принимаются без доказательства.

$\boxed{\mathbf{9.5}}$ *На какое наибольшее количество непересекающихся групп можно разбить все целые числа от* 1 *до* 25 *так, чтобы в каждой группе сумма чисел была полным квадратом?*

Решение 1: Группу из одного числа могут образовывать только 5 квадратов. Остальные 20 чисел должны быть разбиты на группы хотя бы по два. Поэтому всего групп будет не более 15. Проверим, что ровно 15 групп быть не может. Действительно, в таком случае числа 1, 4, 9, 16, 25 образуют отдельные группы, а остальные числа разбиты на пары. Сумма оставшихся чисел равна 270, и они могут давать попарные суммы от 5 до 47. Таким образом, число 270 должно являться суммой 10 чисел, каждое из которых равно 9, 16, 25 или 36. По модулю 9 эти числа дают остатки 0 и 7, поэтому остаток 7 использован либо 0 раз, либо 9. Но в первом случае остаток суммы по модулю 27 равен 9, а не 0, а во втором сумма всех чисел не больше $25 \cdot 9 + 36 = 261$.

Пример с 14 группами: выделим в отдельные группы числа 9, 16 и 25, а остальные разобьём на 11 пар с суммой 25.

Решение 2: Можно явно предъявить 11 чисел, не являющихся полными квадратами и таких, что их попарные суммы не квадраты. Это числа 2, 8, 10, 11, 13, 18, 19, 20, 21, 22 и 24 (это требует большой ручной проверки). Отсюда следует, что ситуация с 5 одиночными группами и 10 парами невозможна.

Решение 3: Пусть квадраты образовывают отдельные группы, а остальные числа разбиты по парам. Тогда с числом 21 в группе может быть только 15, но тогда в группе с 10 только число 6, а тогда с числом 19 только 17, и получаем, что к числу 8 пару найти нельзя.

Критерии:

- Доказано только, что групп не больше 14, примера нет — 4 балла;
- Приведён пример, но не доказано, что 15 групп не бывает — 2 балла.