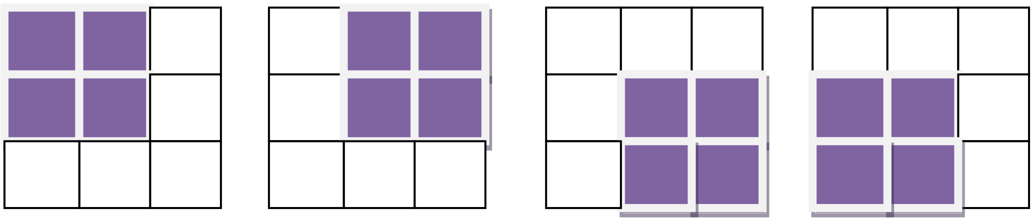
Олимпиадные задачи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по МАТЕМАТИКЕ (2022 - 2023 уч. год)

9 класс

Сначала в каждую клетку таблицы 3×3 вписан ноль. За один ход разрешается выбрать квадрат 2×2 и к каждому числу в его клетках добавить 1. Старые числа при этом стираются, а вместо них записываются полученные. Можно ли за несколько таких ходов получить таблицу с заданными числами в определенных клетках (показано на рисунке)? Ответ объяснить.

	10	
9		11
	15	

Варианты выбора квадратов 2×2 показаны на рисунке.



Решение

В каждом варианте накрываются ровно две указанные клетки, значит, за один ход сумма чисел в указанных клетках увеличивается ровно на 2. Начальная сумма в них равна 0. Конечная сумма 9+10+11+15 является нечетной, поэтому заданные числа в указанных клетках получиться не могли.

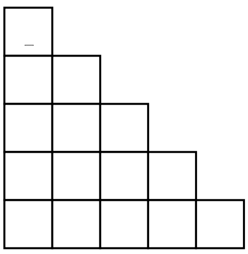
Критерии оценивания.

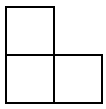
Только верный ответ – 0 баллов.

Замечено, что к числу в клетке на середине стороны прибавляется единица при двух вариантах выбора квадрата, а вывод о том, что сумма всех чисел на серединах сторон увеличивается на 2, отсутствует – 3 балла. Переформулировать?

Верное решение – 7 баллов.

2. Можно ли фигуру, изображенную на рисунке, замостить без наложений и просветов уголками из трех клеток? Ответ объяснить.

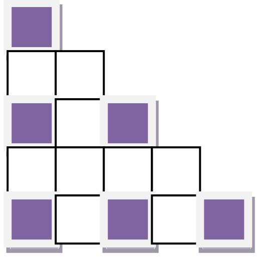




уголок из трех клеток

Решение

Введем раскраску как на рисунке.



Каждый уголок из трех клеток накрывает не более одной закрашенной клетки. Поскольку для замощения доски требуется 5 уголков, то закрашенных клеток должно быть не более пяти, а их 6. Поэтому нельзя.

3. Известно, что сумма квадратов двух натуральных чисел делится на 7. Верно ли, что их произведение делится на 49? Ответ обоснуйте.

Решение

Рассмотрим множество остатков от деления натурального числа на 7: $\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Следовательно, множество остатков от деления квадрата натурального числа на 7 состоит из чисел $\{0,1,2,4\}$. Исходя из полученного множества остатков, сумма квадратов натуральных чисел будет делиться на 7 тогда, когда каждое из них делится на 7. Таким образом, верно, что произведение чисел будет делиться на 7

Критерии оценивания

Только приведен пример - 0 баллов.

Доказано, что если каждое из чисел делится на 7, то произведение этих чисел делится на 49 - 1 балл.

Упущены некоторые случаи в работе с остатками, но идея решения прослеживается - 2-3 балла в зависимости от продвижения в решении.

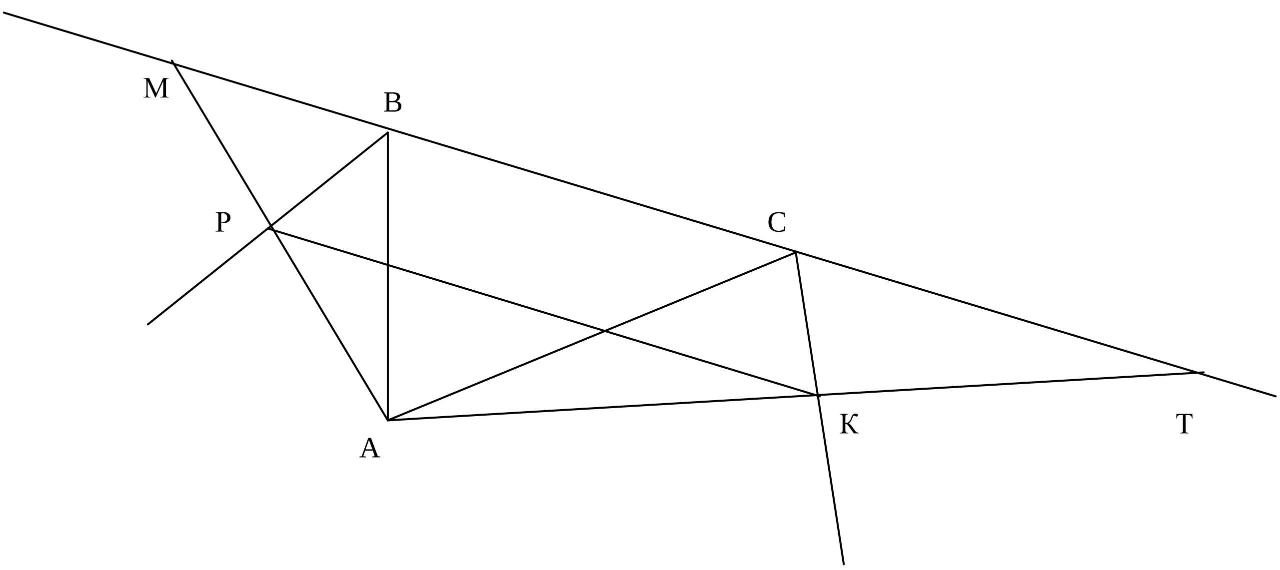
Допущена вычислительная ошибка, грубо влияющая на доказательство и приводящая к неверным промежуточным выводам, но все случаи работы с остатками рассмотрены - 4 балла.

Допущена вычислительная ошибка, незначительно влияющая на доказательство и не приводящая к неверным промежуточным выводам, но все случаи работы с остатками рассмотрены - 5-6 баллов (в зависимости от полноты рассуждений)

Верное и полное решение задачи - 7 баллов.

4. На биссектрисы внешних углов ABC и ACB треугольника ABC из его вершины A опущены перпендикуляры AP и AK. Найти длину отрезка PK, если периметр треугольника ABC равен p.

Решение



В треугольнике ABC проведем биссектрисы внешних углов при вершинах B и C. Опустим на них перпендикуляры из вершины A. Продлим построенные перпендикуляры до пересечения с прямой, содержащей сторону BC треугольника ABC.

Треугольник ABP равен треугольнику MBP, а треугольник ACK равен треугольнику TCK. Отсюда делаем вывод о равенстве соответствующих сторон треугольников и о том, что отрезок PK - средняя линия треугольника AMT.

$$\mathrm{PK} = \frac{\mathrm{MT}}{2} = \frac{\mathrm{MB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CT}}{2} = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA}}{2} = \frac{\mathrm{p}}{2}$$

Критерии оценивания

Рассмотрены отдельные шаги, являющиеся существенными для решения - 1-3 балла в зависимости от продвижения по задаче.

Решение выполнено, ответ получен, однако имеются неточности в обоснованиях или рассуждениях - 4-6 баллов.

Полное и верно обоснованное решение задачи - 7 баллов.

5. Сколько целочисленных решений (x, y) имеет уравнение $|x| + |y| = n$?

Решение

Графическая интерпретация уравнения - границы квадрата со сторонами на прямых $x + y = n,\ -x + y = n,\ x - y = n,\ -x - y = n$. Стороне, лежащей на прямой $x + y = n$, соответствует n+1 точка с целочисленными координатами, стороне, лежащей на прямой $-x + y = n$, соответствует n+1 точка с целочисленными координатами, одна из которых принадлежит стороне, лежащей на прямой $x + y = n$, поэтому считаем n точек. Следующая прямая добавляет еще n точек, четвертая прямая - n-1 точку. Таким образом, на сторонах квадрата оказывается 4n точек.

Критерии оценивания

Только верный ответ – 0 баллов.

Решение начато, осуществляется подсчет решений (аналитически или графически), но решение не доведено до ответа - 1-3 балла в зависимости от продвижения.

Ответ получен, но имеется одна или несколько ошибок в подсчете количества точек - 4-6 баллов.

Полное и верно обоснованное решение задачи - 7 баллов.