**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
2022-2023 учебный год. Камчатский край
**возрастная группа 9 класс**
Максимальное количество баллов 35

**9.1.** Можно ли в клетках шахматной доски расставить чёрных и белых пешек так, чтобы три пешки одного цвета не шли подряд ни по горизонтали, ни по вертикали, ни по диагонали? Шахматная доска имеет размер 8х8. Пешек обоих цветов неограниченное количество.

*Решение:*

Пример расстановки пешек:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* |
| **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* |
| *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** |
| *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** |
| **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* |
| **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* |
| *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** |
| *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** | *Б* | **Ч** |

*Ответ:* Да, можно.

| Критерии | *баллы* |
|---|---|
| 1. Верный ответ, приведён пример | 7 |
| 2. Только верный ответ. | 0 |

**9.2.** Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases}$.

*Решение:*

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 - (xy)^2 = 481 \\ x^2+y^2+xy = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy) = 481 \\ x^2+y^2+xy = 37 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy = \dfrac{481}{37} = 13 \\ x^2+y^2+xy = 37 \end{cases}$$

Делаем замены: $x^2 + y^2 = t$ и $xy = n$, тогда $\begin{cases} t - n = 13 \\ t + n = 37 \end{cases}$. Решая систему линейных уравнений, получаем: $t = 25$ и $n = 12$.

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2xy+y^2 = 25 + 2\cdot 12 = 49 \\ x^2-2xy+y^2 = 25 - 2\cdot 12 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = \pm 7 \\ x-y = \pm 1 \end{cases}$$

Решая 4 системы линейных уравнений, получаем: (4;3), (3;4), (-3;-4) и (-4;-3).

*Ответ:* (4;3), (3;4), (-3;-4) и (-4;-3).

| Критерии | *баллы* |
|---|---|
| 1. Полное решение задачи. | 7 |
| 2. Верный ход решения, но потеряна часть решений. Решение становится полностью верным при исправлении.<br>Ошибки в решении систем линейных уравнений, при верном алгоритме решения. | 4 |
| 3. Задача не решена, но в исходной системе понижена степень. | 2 |
| 4. Найдены все четыре решения, без лишних, но не доказано, почему других нет. | 1 |
| 5. Неверное решение. | 0 |

**9.3.** Докажите, что не существует трёхзначных чисел, у которых сумма всех цифр равна самому этому числу, уменьшенному на произведение всех его цифр.

*Решение:*

Допустим, что такое число существует, и представим его как $\overline{abc}$, где $a > 0$. Выполняется соотношение: $a + b + c = \overline{abc} - abc$.

$$a + b + c = 100a + 10b + c - abc$$

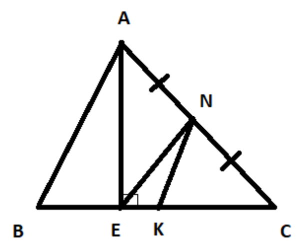
$$99a + 9b = abc$$

Из полученного выражения делаем вывод, что $99a \leq abc$, откуда $99 \leq bc$, так как $a > 0$. Наибольшее возможное произведение двух цифр – 81. Получаем противоречие. Исходное предположение – неверно, значит, таких чисел не существует.

| Критерии | баллы |
|---|---|
| 1. Полное решение задачи | 7 |
| 2. Получено выражение $99a + 9b = abc$ или какое-либо другое, из которого можно сделать вывод о противоречии, но он не сделан. | 2 |
| 3. Неверное решение. | 0 |

**9.4.** В треугольнике $ABC$ $\angle ABC = 2\angle ACB$, $K$ – середина стороны $BC$, $AE$ – высота. Докажите, что $AB = 2EK$.

*Решение:*



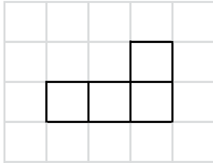

Пусть N – середина стороны AC. Проведём отрезки KN и EN. KN – средняя линия треугольника ABC, значит AB=2KN и достаточно доказать, что EK=KN.

EN – медиана прямоугольного треугольника, проведённая до гипотенузы, значит EN=AN=NC и $\angle NEC = \angle C$. Поскольку $KN \| AB$, то $\angle NKC = \angle B = 2\angle C$. $\angle NKC$ – внешний угол $\Delta EKN$, значит $\angle ENK = \angle C$. $\Delta EKN$ – равнобедренный, следовательно $EK = KN = 0{,}5AB$, что и требовалось доказать.

Вышеуказанное решение справедливо и для $\angle B \geq 90^0$.

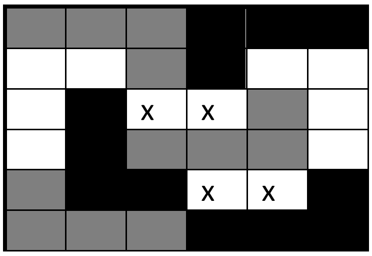
| Критерии | *баллы* |
|---|---|
| Полное решение задачи. | 7 |
| Решение задачи, аналогичное авторскому, без указания, что будет с прямоугольным и тупоугольным треугольником. | 6 |
| Предоставлено иное решение для остроугольного или тупоугольного треугольника, подразумевающее, что для другого треугольника чертёж и выкладки изменятся. То есть решение участника работает только для тупоугольного или только для остроугольного треугольника. | 4 |
| Доказано только для прямоугольного треугольника. | 2 |
| Сделаны дополнительные построения, способные привести к решению задачи, других продвижений нет. | 1 |
| Неверное решение. | 0 |

**9.5.** Какое наибольшее количество фигурок состоящих из 4-х квадратов 1х1, указанных на рисунке, можно вырезать из таблицы 6х6, если резать можно только по линиям сетки?

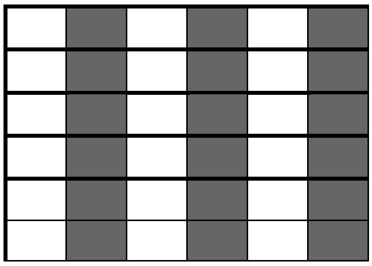


*Решение:*

Пример:




На рисунке показан пример, что 8 фигурок вырезать можно.



Оценка:

Раскрасим чётные (по номеру) столбцы в серый цвет, а нечётные – в белый. За каждое вырезание фигурки клеток одного цвета вырежется на 2 больше, чем другого. Таким образом, чтобы разрезать всю таблицу нам нужно, чтобы фигурок с тремя серыми клетками было ровно столько же, сколько и с тремя белыми, то есть чётное количество. 36:4=9, число нечётное, значит всю фигуру разрезать не получится.

*Ответ:* 8 фигурок.

| Критерии | *баллы* |
|---|---|
| Полное решение задачи. | 7 |
| Только оценка, без примера. | 5 |
| Верный ответ с примером. | 2 |
| Только верный ответ, без оценки и примера. | 0 |
| Неверное решение. | 0 |