РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 9 КЛАССА

Задача 1. *Докажите, что всякое не равное нулю число можно представить в виде частного от деления квадрата некоторого числа на куб некоторого числа.*

Решение. $a = (a^2)^2/a^3$ или $a = (1/a)^2/(1/a)^3$.

• За любое верное представление — *7 баллов*.

Задача 2. *На плоскости отметили 100 точек. Оказалось, что на двух различных прямых* a *и* b *лежит по 40 отмеченных точек. Какое наибольшее количество отмеченных точек может лежать на прямой, не совпадающей с* a *и* b*?*

Ответ. 23. ***Решение.*** У прямых a и b не больше одной общей точки. Если она есть и отмечена, то на прямых a и b вместе лежит 79 отмеченных точек, иначе — 80. Значит, вне прямых a и b отмечено не больше 21 точки.

Возьмём произвольную прямую c, не совпадающую с a и b. На ней отмечено не больше 21 точки, не лежащей на a и b, и, кроме того, отмеченными могут быть точки ее пересечения с a и b — всего не больше 23 точек.

Отметим вершины некоторого треугольника ABC. На его сторонах $a = BC$ и $b = AC$ отметим ещё по 38 точек, а на стороне $c = AB$ отметим ещё 21 точку. Мы построили пример, когда на прямой c лежат ровно 23 точки, что и завершает решение.

♦ См. также задачу 7-2.

• За ответ без обоснования — *0 баллов*. Ответ с верным примером без обоснования оценки — *3 балла*, обоснование оценки оценивается *из оставшихся 4 баллов*.

Задача 3. *В ряд выписано 101 число (числа не обязательно целые). Среднее арифметическое всех чисел без первого равно 2022, среднее арифметическое всех чисел без последнего равно 2023, а среднее арифметическое первого и последнего равно 51. Чему равна сумма всех выписанных чисел?*

Ответ. 202301. ***Решение.*** Пусть сумма всех чисел равна S, первое число равно a, последнее число равно b. По условию $(S–a)/100 = 2022$, $(S–b)/100 = 2023$, $(a+b)/2 = 51$, откуда $S–a = 2022\cdot100$, $S–b = 2023\cdot100$, $a+b = 51\cdot2$. Сложив три этих равенства, получаем $2S = 4045\cdot100+51\cdot2$, откуда $S = 4045\cdot50+51 = 202301$.

• За ответ без обоснования — *0 баллов*.

Задача 4. *В треугольнике ABC, у которого угол B меньше 120 градусов, медиана BD короче половины стороны AB. Докажите, что эта медиана длиннее половины стороны BC.*

Решение. Допустим, что $BD \le BC/2$. Тогда, копируя с минимальным изменением, связанным с нестрогостью неравенства $BD \le BC/2$, рассуждения из решения задачи 4 для 8 класса, получаем, что $\angle ABC \ge 120°$ (и даже $\angle ABC > 120°$), что противоречит условию.

• За идею провести среднюю линию из основания медианы BD или удвоить медиану BD без дальнейшего содержательного продвижения — *1 балл*. Идея доказывать «от противного» без дальнейшего содержательного продвижения *не оценивается*.

Задача 5. *Существуют ли такие три квадратных трёхчлена, что каждый из них имеет два корня, сумма любых двух из них — один корень, а сумма всех трёх не имеет корней?*

Ответ. Существуют. ***Решение.*** Например, x^2-x, x^2+x, $-x^2+2x+3$.

♦ Как был придуман этот пример? То, что у двух трёхчленов коэффициент при x^2 равен 1, а у одного –1, обеспечивает нам единственность корня у двух сумм, задающих линейные функции. Единственность корня у третьей суммы достигается выбором коэффициентов при x и свободных членов слагаемых, а отсутствие корней у суммы всех трёхчленов — выбором достаточно большого свободного члена у трёхчлена с отрицательным коэффициентом при x^2. Очевидно, таких примеров бесконечно много.

• Любой верный пример — *7 баллов*. При отсутствии верного примера за содержательное продвижение в направлении его построения можно начислить *до 3 баллов*. В частности, за идеи получить две суммы, задающие линейные функции, и добиться отсутствия корней у суммы трёхчленов выбором достаточно большого свободного члена у трёхчлена с отрицательным коэффициентом при x^2— *по 1 баллу*.

Задача 6. *В белом клетчатом квадрате размером 10×10 клеток закрасили черным 84 клетки. Какое наименьшее количество «уголков» из трех черных клеток могло при этом образоваться?*

Ответ. 132. ***Решение.*** На бесконечной клетчатой плоскости каждая клетка, как легко проверить, принадлежит 12 различным «уголкам». Заметим, что каждый «уголок» получается удалением одной клетки из некоторого квадрата 2x2. В клетчатом квадрате 10x10 содержится 81 клетчатый квадрат 2x2: по 9 квадратов в каждой горизонтальной полосе шириной 2. Из каждого такого квадрата можно получить удалением одной клетки четыре «уголка». Стало быть, всего в квадрате 10x10 содержится $81 \cdot 4 = 324$ «уголка».

Покрасим весь квадрат 10x10 в чёрный цвет, а затем перекрасим 16 клеток в белый, чтобы оставить 84 чёрных клетки. При этом перекрашивание каждой клетки уменьшит количество чёрных «уголков» не больше, чем на 12, поэтому в итоге чёрных «уголков» останется не меньше, чем $324-12 \cdot 16 = 132$. Осталось заметить, что если мы перекрасим в белый цвет 16 клеток на пересечениях столбцов с номерами 2, 4, 6, 8 со строками с такими же номерами, то каждая из этих клеток уничтожит ровно 12 чёрных «уголков», и их останется ровно 132.

• За ответ без обоснования — *0 баллов*. Ответ с верным примером при отсутствии оценки — *3 балла*.