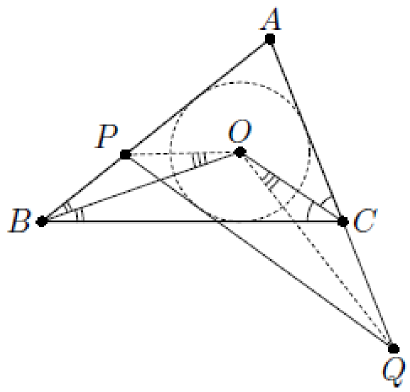
9 класс

1. На некоторые клетки квадратной доски 4×4 выкладывают стопкой золотые монеты, а на остальные клетки – серебряные. Можно ли положить монеты так, чтобы в каждом квадрате 3×3 серебряных монет было больше, чем золотых, а на всей доске золотых было больше, чем серебряных?
Ответ: можно.
Решение. Например, положим на одну из клеток центрального квадрата 2×2 стопку из девяти серебряных монет, а на остальные клетки доски – по одной золотой монете. Тогда в каждом квадрате 3×3 будет 9 серебряных монет и 8 золотых, а на всей доске – 15 золотых и 9 серебряных.

2. Могут ли произведения всех ненулевых цифр двух последовательных натуральных чисел отличаться ровно в 54 раза?
Ответ: могут, например у чисел 299 и 300.

3. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. На стороне AB выбрана точка P, а на продолжении стороны AC за точку C – точка Q так, что отрезок PQ касается окружности. Докажите, что $\angle BOP = \angle COQ$.
Решение. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе. Применяя для треугольника BOP теорему о внешнем угле (см. рис.), получим
$\angle BOP = \angle APO - \angle ABO = ½\,\angle APQ - ½\,\angle B$. Аналогично, $\angle COQ = \angle ACO - \angle AQO = ½\,\angle C - ½\,\angle AQP$. Осталось убедиться, что
$\angle APQ - \angle B = \angle C - \angle AQP$. Это равенство равносильно тому, что $\angle APQ + \angle AQP = \angle B + \angle C$, которое, очевидно, выполняется, так как каждая его часть равна $180° - \angle A$.



4. Из Златоуста в Миасс выехали одновременно "ГАЗ", "МАЗ" и "КамАЗ". "КамАЗ", доехав до Миасса, сразу повернул назад и встретил "МАЗ" в 18 км, а "ГАЗ" – в 25 км от Миасса. "МАЗ", доехав до Миасса, также сразу повернул назад и встретил "ГАЗ" в 8 км от Миасса. Каково расстояние от Златоуста до Миасса?
Ответ: 60 км.
Решение. Пусть расстояние между городами равно x км, а скорости грузовиков: "ГАЗа" – g км/ ч, "МАЗа" – m км/ч, "КамАЗа" – k км/ч. Для каждой пары машин приравняем их время движения до встречи.
Получим $\frac{x+18}{k}=\frac{x-18}{m}$, $\frac{x+25}{k}=\frac{x-25}{g}$ и $\frac{x+8}{m}=\frac{x-8}{g}$. Отсюда
$$\frac{x+18}{x-18}\cdot\frac{x-25}{x+25}\cdot\frac{x+8}{x-8}=\frac{k}{m}\cdot\frac{g}{k}\cdot\frac{m}{g}=1\,.$$
Преобразуем полученное уравнение $x^3 + x^2 + (18·8 - 18·25 - 8·25)x - 18·8·25 = x^3 - x^2 + (18·8 - 18·25 - 8·25)x + 18·8·25$ $\Leftrightarrow$ $2x^2 = 2·18·8·25$. Так как $x > 0$, то $x = 60$.

5. В ожидании покупателей продавец арбузов поочерёдно взвесил 20 арбузов (массой 1 кг, 2 кг, 3 кг, ..., 20 кг), уравновешивая арбуз на одной чашке весов одной или двумя гирями на другой чашке (возможно, одинаковыми). При этом продавец записывал на бумажке, гири какой массы он использовал. Какое наименьшее количество различных чисел могло оказаться в его записях, если масса каждой гири – целое число килограммов?
Ответ: 6.
Решение. Одной или двумя гирями массы 1 кг, 3 кг, 5 кг, 7 кг, 9 кг и 10 кг можно взвесить любой из данных арбузов. Действительно, $2 = 1 + 1$, $4 = 3 + 1$, $6 = 5 + 1$, $8 = 7 + 1$, $11 = 10 + 1$, $12 = 9 + 3$, $13 = 10 + 3$, $14 = 9 + 5$, $15 = 10 + 5$, $16 = 9 + 7$, $17 = 10 + 7$, $18 = 9 + 9$, $19 = 10 + 9$, $20 = 10 + 10$. Таким образом, шесть различных чисел могло быть записано.

Покажем, что пяти типов гирь недостаточно для требуемых взвешиваний. Если гирь пять, то какие-то двадцать арбузов, вообще говоря, взвесить можно. А именно: пять арбузов уравновесить одиночными гирями, пять – двойными и остальные $5 \cdot 4 : 2 = 10$ арбузов – парами различных гирь. Но при этом каждая комбинация гирь должна быть использована ровно один раз.

Заметим, что половина арбузов имеет нечётную массу. Пусть из пяти гирь k имеют нечётную массу, а $5 - k$ – чётную. Тогда количество способов взвесить арбуз нечётной массы в точности равно $k + k(5 - k) = 6k - k^2$. Однако ни при каком $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ это выражение не равно 10 (это можно проверить либо подстановкой, либо решив квадратное уравнение $6k - k^2 = 10$).