Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2022/23 уч.г.
Математика, 9 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

***Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям**

9.1. У пяти детей вместе было десять конфет. Первый сказал: «У меня одна конфета», второй: «У меня две конфеты», …, пятый: «У меня пять конфет». Сколько из этих высказываний могли быть ложными?
Ответ. От 1 до 5 высказываний.
Решение. Общее количество «заявленных» конфет не равно десяти, поэтому хотя бы одно из высказываний ложно. Примеры распределения конфет для приведённых в ответе количеств ложных высказываний:1) $1, 2, 3, 4, 0$; 2) $1, 2, 3, 0, 4$; 3) $1, 2, 0, 0, 7$; 4) $1, 0, 0, 0, 9$; 5) $0, 0, 0, 0, 10$.
Комментарий. *Верное решение – 7 баллов. Доказано, что хотя бы одно из высказываний ложно – 2 бала. За каждый пример – по 1 баллу. Баллы суммируются. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.2. Барон Мюнхгаузен рассказал, что однажды расставил по кругу в некотором порядке все натуральные числа от 1 до 100, а затем посчитал всевозможные суммы любых трёх подряд идущих чисел и выписал их на доску. Оказалось, что все числа на доске были простыми. Не ошибается ли барон?
Ответ. Ошибается.
Решение. Предположим, что числа получилось расставить требуемым образом. Заметим, что сумма любых трех чисел от 1 до 100 больше 2, поэтому если какая-то сумма трех чисел равна простому числу, то это простое число нечётное. Пусть по кругу подряд стоят числа a, b, c, d. Тогда числа $a+b+c$ и $b+c+d$ – простые нечётные. Но тогда их разность, равная $a-d$, будет чётной как разность двух нечётных чисел. Отсюда следует, что числа a и d имеют одинаковую чётность. Таким образом, любые два числа, стоящие через два, имеют одинаковую чётность. Занумеруем числа по кругу. Тогда числа с номерами $1, 4, 7, \ldots, 100$ будут иметь одинаковую чётность. Но число с номером 3 должно иметь такую же чётность, что и число с номером 100. Аналогично, такую же чётность будут иметь числа с номерами $6, 9, 12, \ldots, 99, 2, 5, \ldots, 98$. Таким образом, все числа получились одной чётности. Противоречие.
Комментарий. *Верное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 5-6 баллов. Доказано, что любые два числа, стоящие через два, имеют одинаковую четность – 3 балла. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.*

9.3. Натуральные числа a, b, c таковы, что $\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}=\frac{2c}{b+c}$. Докажите, что bc – полный квадрат.

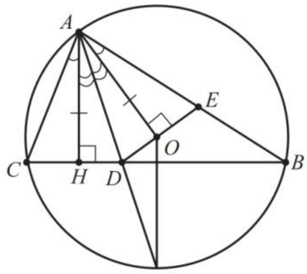
Решение. Перенесём всё в одну часть и преобразуем:

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}-\frac{2c}{b+c}=\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}-\frac{c}{b+c}\right)+\left(\frac{c^2}{a^2+c^2}-\frac{c}{b+c}\right)=$$
$$=\frac{b(a^2-bc)}{(a^2+b^2)(b+c)}+\frac{c(bc-a^2)}{(a^2+c^2)(b+c)}=\frac{a^2-bc}{b+c}\left(\frac{b}{a^2+b^2}-\frac{c}{a^2+c^2}\right)=$$
$$=\frac{(b-c)(a^2-bc)^2}{(b+c)(a^2+b^2)(a^2+c^2)}=0.$$

Значит, либо $b-c=0$, либо $a^2-bc=0$, а тогда $bc=b^2$ или $bc=a^2$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном решении имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы – 5-6 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.4. В остроугольном треугольнике ABC $(AB>AC)$ длина высоты AH равна радиусу описанной окружности треугольника ABC. Точка O – центр описанной окружности треугольника ABC. Биссектриса треугольника ABC, проведённая из вершины A, пересекла сторону BC в точке D, а прямая DO пересекла сторону AB в точке E. Докажите, что $HE=AH$.



Решение. Сперва заметим, что $\angle BAO=\angle CAH$. Действительно, $\angle AOB$ центральный, значит $\angle AOB=2\angle ACB$, а треугольник AOB – равнобедренный, поэтому $\angle BAO$ равен $90^{\circ}-\angle ACB$. В то же время, $\angle CAH$ находится из прямоугольного треугольника ACH и равен $\angle CAH=90^{\circ}-\angle ACB$. Также это означает, что AD является биссектрисой $\angle OAH$, то есть $\angle DAO=\angle DAH$. Треугольники ADH и ADO равны по двум сторонам и углу между ними, значит $\angle AOD=90^{\circ}$. Из этого следует равенство прямоугольных треугольников AEO и ACH, откуда $AE=AC$. Треугольники AEH и AOC также равны, поскольку $\angle OAC=\angle EAH$, $AC=AE$, $AH=AO$, а значит $HE=CO=AO=AH$, что и требовалось доказать.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла.*

9.5. В таблице 5×5 записаны все числа от 1 до 25, по одному числу в клетке. Рассмотрим все пары чисел, стоящих в одной строке или в одном столбце. Для каждой пары вычисляется отношение большего числа к меньшему. Минимальное из этих отношений среди всех пар обозначим A. Какое максимальное значение может принять A при разных расстановках чисел в таблице?

Ответ. $\frac{6}{5}$.

Решение. Рассмотрим числа $25, 24, 23, 22, 21$. Если какие-нибудь два из них находятся в одной и той же строке или в одном и том же столбце, то $A\le\frac{25}{21}<\frac{6}{5}$. Пусть все эти числа лежат в разных строках и разных столбцах. Поскольку чисел 5, а строк и столбцов тоже по 5, в строке, где находится число 20, встретится одно из чисел $25, 24, 23, 22, 21$, и в столбце, где находится число 20, встретится другое из этих чисел. Отсюда $A\le\frac{24}{20}=\frac{6}{5}$. Таким образом, при любом расположении чисел $A\le\frac{6}{5}$.

Покажем, что эта оценка достигается. Найдём число A для приведённого примера. В каждой строке записаны числа, отличающиеся на $5, 10, 15, 20$. Очевидно, что самые маленькие отношения в строках будут у пар наибольших соседних чисел: $\frac{21}{16}$, $\frac{22}{17}$, $\frac{23}{18}$, $\frac{24}{19}$, $\frac{25}{20}$. При этом наименьшее из них $\frac{25}{20}=\frac{5}{4}>\frac{6}{5}$. В первом столбце числа отличаются на число, кратное 4; самое маленькое отношение равно $\frac{21}{17}>\frac{6}{5}$. Во втором столбце минимальное отношение равно $\frac{22}{18}>\frac{6}{5}$, в третьем $\frac{23}{19}>\frac{6}{5}$, в пятом $\frac{16}{12}>\frac{6}{5}$. В четвёртом столбце минимальное отношение равно $\frac{24}{20}=\frac{6}{5}$. Следовательно, $A=\frac{6}{5}$, и оценка достигается.

21	1	6	11	16
17	22	2	7	12
13	18	23	3	8
9	14	19	24	4
5	10	15	20	25

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Получена оценка – 4 балла, приведён и обоснован пример – 3 балла, баллы суммируются. Верный пример без обоснования – 2 балла. За рассмотрение неоптимальных примеров баллы не начисляются. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*