Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2022-2023 уч.год

9 класс

Решения и ответы

1. Найдите отношение $\dfrac{2023ac}{b^2}$, если известно, что один из корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ в 2022 раза больше другого. Здесь $a\cdot b\cdot c\neq 0$.

   Решение. Пусть $x_1 = 2022x_2$. Тогда по теореме Виета
   $x_1+x_2 = 2023x_2 = -\frac{b}{a}$ $\quad x_1\cdot x_2 = 2022x_2^2 = \frac{c}{a}$.
   Тогда

$$x_2 = -\frac{b}{2023a}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{2022b^2}{2023^2\cdot a^2}$$

$$ac = \frac{2022b^2}{2023^2}$$

$$2023ac = \frac{2022b^2}{2023}$$

$$\frac{2023ac}{b^2} = \frac{2022b^2}{2023b^2} = \frac{2022}{2023}$$

   Ответ. $\dfrac{2022}{2023}$

2. Найдите все решения уравнения

$$m^2-2mn-3n^2=5$$

   где m, n – целые числа.

   Решение.
   Преобразуем левую часть уравнения

$$m^2-2mn+n^2-4n^2=5$$

$$(m-n)^2-(2n)^2=5$$

$$(m-n-2n)(m-n+2n)=5$$

$$(m-3n)(m+n)=5$$

   Целое число 5 можно разложить на множители четырьмя способами: $5=1\cdot 5=5\cdot 1=(-1)\cdot(-5)=(-5)\cdot(-1)$. Получаем четыре системы уравнений, которые нужно решить в целых числах. Решаем, вычитая из второго уравнения первое.

$$\begin{cases} m-3n=1, \\ m+n=5, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4n=4, \\ m+n=5, \end{cases} \qquad \begin{cases} m=4, \\ n=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-3n=5, \\ m+n=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4n=-4, \\ m+n=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} m=2, \\ n=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-3n=-1, \\ m+n=-5, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4n=-4, \\ m+n=-5, \end{cases} \qquad \begin{cases} m=-4, \\ n=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-3n=-5, \\ m+n=-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4n=4, \\ m+n=-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} m=-2, \\ n=1 \end{cases}$$

Ответ. $m=4, n=1;\ m=-4, n=-1;\ m=2, n=-1;\ m=-2, n=1.$

3. Докажите неравенство при всех положительных a, b

$$\frac{a}{a^4+b^2}+\frac{b}{a^2+b^4}\le\frac{1}{ab}$$

Решение. Применяя формулу квадрата разности, получаем

$$(a^2-b)^2\ge 0, \qquad (a-b^2)^2\ge 0$$

$$a^4+b^2\ge 2a^2b, \qquad a^2+b^4\ge 2ab^2$$

Слагаемые в левой части неравенства можно сравнить с $\dfrac{1}{2ab}$

$$\frac{a}{a^4+b^2}\le\frac{a}{2a^2b}=\frac{1}{2ab}, \qquad \frac{b}{a^2+b^4}\le\frac{b}{2ab^2}=\frac{1}{2ab}$$

Складываем и получаем нужное неравенство

$$\frac{a}{a^4+b^2}+\frac{b}{a^2+b^4}\le\frac{1}{2ab}+\frac{1}{2ab}=\frac{1}{ab}$$

4. После футбольного матча Андрей сказал, что он забил 3 гола, а Паша забил только 1. Паша сказал, что забил 4 гола, а Ваня забил 5 голов. Ваня сказал, что он забил 6 голов, а Андрей только 2. Могло ли оказаться, что втроем они забили 10 голов, если известно, что каждый из них сказал один раз правду, а другой раз солгал?

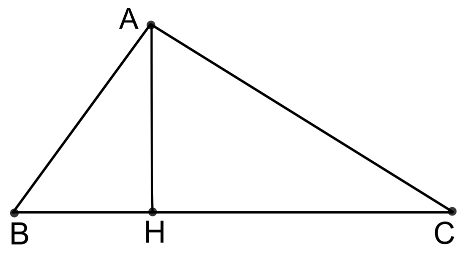
Решение. Первый способ. Возможны два случая.
1) Если Андрей сказал правду про себя, то он забил 3 гола. Тогда Ваня про Андрея солгал, а про себя Ваня сказал правду, то есть он действительно забил 6 голов. Следовательно, Паша солгал про Ваню и сказал правду про себя, то есть он забил 4 гола. В этом случае мальчики забили в сумме $3+6+4=13$ голов.
2) Если Андрей про себя солгал, то он сказал правду про Пашу, то есть Паша забил 1 гол. Тогда Паша также солгал про себя и сказал правду про Ваню, значит, Ваня забил 5 голов. Следовательно, Ваня про себя солгал и сказал правду про Андрея, что тот забил 2 гола. В этом случае мальчики забили в сумме $1+5+2=8$ голов.

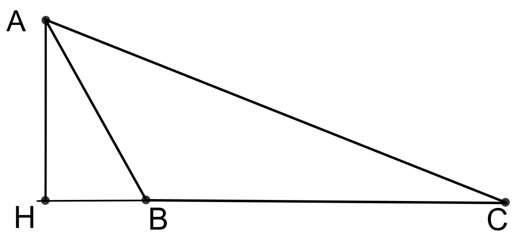
Второй способ. Всего было высказано шесть утверждений, из которых ровно три — истинные. Про каждого из мальчиков было сделано по два различных утверждения, из которых одно должно быть истинным, а другое — ложным. Следовательно, Андрей забил либо 3 гола, либо 2, Паша — 1 или 4 гола, а Ваня — 5 или 6 голов. Заметим, что сумма 10 при таких вариантах может получится единственным образом: если Андрей забил 3 гола, Паша — 1, а Ваня — 6. Однако, высказывание «Андрей забил 3 гола, а Паша — один», было сделано одним и тем же мальчиком, значит, такая ситуация невозможна.

Ответ. Не могло.

5. В треугольнике ABC $AC > AB$. Из вершины A опущена высота AH. Какая разность больше, $(AC - AB)$ или $(HC - HB)$?

Решение. Необходимо рассмотреть два случая, см. рис.





1й случай. Точка H лежит внутри отрезка BC. По теореме Пифагора

$$AB^2 - BH^2 = AH^2 = AC^2 - CH^2$$

Перейдем к разности квадратов и к сравнению отрезков.

$$CH^2 - BH^2 = AC^2 - AB^2$$

$$(CH - BH)(CH + BH) = (AC - AB)(AC + AB)$$

$$(CH - BH) \cdot BC = (AC - AB)(AC + AB)$$

По неравенству треугольника $AC + AB > BC$. Так как произведения равны, и второй множитель в правом произведении больше второго множителя в левом произведении, то $CH - BH > AC - AB$.

2й случай. Точка H лежит вне отрезка BC или совпадает с точкой B. По теореме Пифагора

$$AB^2 - BH^2 = AH^2 = AC^2 - CH^2$$

Из этого уравнения и условия $AC > AB$ следует, что B лежит между H и C, т.е. $CH > BH$. (В частности, $BH = 0$, H совпадает с точкой B). Значит, $CH - BH = BC$, и требуется сравнить $AC - AB$ и BC. По неравенству треугольника, $BC + AB > AC$, поэтому $BC > AC - AB$.
Получили, что в обоих случаях $CH - BH > AC - AB$.

Ответ. $CH - BH > AC - AB$.