## 9 класс

**9.1.** В поселке проживают семь человек. Некоторые из них лжецы (всегда лгут), а остальные – рыцари (всегда говорят правду). Каждый из них сказал про каждого из остальных кто он: рыцарь или лжец. Из 42 полученных ответов 24 были «Он – лжец». Какое наименьшее количество рыцарей может проживать в поселке?

**Ответ.** 3.

**Решение.** Фразу «Он – рыцарь» скажут рыцарь про рыцаря и лжец про лжеца, а фразу «Он – лжец» скажут рыцарь про лжеца и лжец про рыцаря. Следовательно, в каждой паре рыцарь-лжец фраза «Он – лжец» прозвучит дважды. Поскольку всего эта фраза прозвучала 24 раза, пар рыцарь-лжец всего 12, откуда находим, что рыцарей 3, а лжецов 4, или наоборот.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

**9.2.** Можно ли разрезать клетчатый квадрат 35×35 на клетчатые прямоугольники такие, что периметр каждого из них равен 18, 22 или 26?

**Ответ.** Нельзя.

**Решение.** Предположим, что такое разрезание возможно. Так как периметры прямоугольников равны 18, 22 или 26, то сумма длины и ширины равна 9, 11 или 13. Это означает, что одна из этих величин – четное число, а другая – нечетное. Поэтому площадь каждого прямоугольника разрезания будет четным числом. Значит, и сумма площадей прямоугольников разрезания также будет четным числом. Но эта сумма должна равняться площади квадрата со стороной 35, то есть числу нечетному. Противоречие.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

**9.3.** Положительное число $a$ – коэффициент при $x^2$ квадратного трехчлена $f(x)$, не имеющего корней. Докажите, что при любом $x$ выполняется неравенство $f(x)+f(x-1)-f(x+1)>-4a$.

**Решение.** Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Тогда приведенное в задаче выражение имеет вид: $ax^2+bx+c+a(x-1)^2+b(x-1)+c-a(x+1)^2-b(x+1)-c=ax^2-4ax+bx-2b+c$. Это выражение можно преобразовать к виду $a(x-2)^2+b(x-2)+c-4a=f(x-2)-4a>-4a$, так как из условия задачи следует, что $f(x)>0$ при любом $x$.

**Замечание.** Можно показать, что дискриминант трехчлена $f(x)+f(x-1)-f(x+1)+4a$ равен дискриминанту трехчлена $f(x)$.

**9.4.** Четырехугольник *ABCD* (*AB* >*BC*) вписан в окружность Ω. Известно, что *AD* = *CD*. Докажите, что биссектриса угла *ADB* отсекает от угла *BAC* равнобедренный треугольник.

**Решение.** Пусть биссектриса угла *ADB* пересекает хорды *AC* и *AB* соответственно в точках *M* и *N*, и пересекает Ω в точке *P* . Для доказательства утверждения задачи покажем равенство углов *AMN* и *ANM*. Из равенства вписанных углов *ADP* и *BDP* (*DP* – биссектриса угла *ADB*) следует равенство дуг *AP* и *BP*. Также равны дуги *AD* и *CD*, стягиваемые равными хордами $AD$ и $CD$. По свойству угла между пересекающимися хордами, угол $AMN$ является полусуммой градусных мер дуг $AP$ и $CD$, а угол $ANM$ является полусуммой градусных мер дуг $BP$ и $AD$. Следовательно, углы $AMN$ и $ANM$ равны.

**9.5.** По кругу выписаны 300 целых ненулевых чисел таких, что каждое число больше произведения трех следующих за ним по часовой стрелке чисел. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди этих 300 выписанных чисел?

**Ответ.** 200.

**Решение.** Заметим, что три подряд идущих числа не могут быть положительными (то есть натуральными). Предположим противное. Тогда их произведение положительно, и перед ними (против часовой стрелки) также стоит натуральное число. Так как оно больше произведения этих трех натуральных чисел, то оно больше каждого из них. Продолжая рассуждения, мы получим, что все числа будут натуральными, причем, если идти против часовой стрелки, числа будут возрастать. Но когда «круг замкнется», мы придем к противоречию.

Значит, в любой тройке соседних чисел есть хотя бы одно отрицательное. Разбив наши 300 чисел на 100 троек, мы получим, что записано не меньше 100 отрицательных чисел, а, значит, положительных чисел не больше 200. Если же мы будем чередовать два положительных числа 2 и одно отрицательное число –2, мы получим пример расположения 200 положительных и 100 отрицательных чисел, удовлетворяющих условию задачи.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказана невозможность расположения рядом трех положительных чисел – 3 балла.

Доказано, что положительных чисел не больше 200 – еще 1 балл.

Приведен пример с 200 положительными числами – 3 балла.