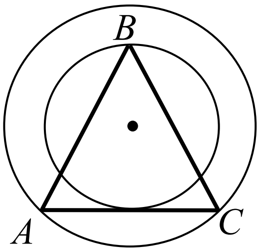
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2022/23 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

МАТЕМАТИКА
9 КЛАСС

Задания для обучающихся
Время выполнения заданий –235 минут
Максимальное количество баллов –42

Написать только ответ — мало! Все ответы нужно объяснить с помощью рассуждений или вычислений!

1. Семеро друзей зашли в кафе и заказали 3 маленьких стаканчика кофе, 8 средних и 10 больших. Объем маленького стаканчика в два раза меньше объема среднего, а объем большого – втрое больше объема маленького. Как друзья должны разделить между собой стаканчики с напитками, чтобы все выпили кофе поровну? Переливать кофе из стаканчика в стаканчик нельзя.



2. На рисунке изображены две окружности с общим центром и равносторонний треугольник *ABC*. Найдите отношение радиусов окружностей.

3. Существуют ли положительные числа a, b, c, d такие, что числа d и $\sqrt{d}$ являются соответственно корнями уравнений $ax+b=c$ и $\sqrt{a}\,x+\sqrt{b}=\sqrt{c}$?

4. В футбольном турнире участвовало 12 команд. До сентября они сыграли несколько игр, причём не встречались друг с другом более одного раза. Известно, что первая команда сыграла ровно в 11 играх. Есть три команды, которые сыграли по 9 игр. Есть одна команда, сыгравшая 5 игр. Четыре команды – по четыре игры. Еще две команды сыграли всего по одной игре. А вот про двенадцатую команду информация потерялась. Сколько игр сыграла 12-я команда?

5. Можно ли во все клетки таблицы 7×7 расставить числа так, чтобы у каждого числа сумма всех его соседей (по стороне) была равна 1?

6. Дан выпуклый четырехугольник *ABCD*. Отмечена точка *M* – середина стороны *BC* и точка *N* – середина стороны *CD*. Отрезки *AM*, *AN* и *MN* разделили четырехугольник на четыре треугольника, площади которых, записанные в некотором порядке, являются последовательными натуральными числами. Какую наибольшую возможную площадь может иметь треугольник *ABD*?

Материалы для членов жюри (ответы, решения, критерии оценивания)

1. Семеро друзей зашли в кафе и заказали 3 маленьких стаканчика кофе, 8 средних и 10 больших. Объем маленького стаканчика в два раза меньше объема среднего, а объем большого – втрое больше объема маленького. Как друзья должны разделить между собой стаканчики с напитками, чтобы все выпили кофе поровну? Переливать кофе из стаканчика в стаканчик нельзя.

Решение: Назовем «нормой» количество кофе в маленьком стаканчике. Тогда суммарно у нас 3+8×2+10×3=49 норм. Т.к. друзей семеро, каждому причитается по 7 норм.

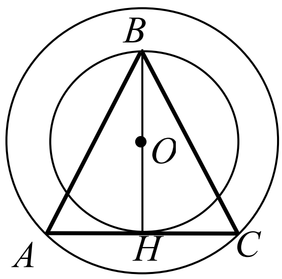
Делим так: 1 маленькая+2 больших – 3 человека; 2 средних + 1 большая – 4 человека.

Критерии. Правильный пример – **7 баллов**. Никакие дополнительные рассуждения не требуются. Получен результат, что каждому требуется 7 «норм», но не показан пример (или пример приведен неверно) – **1 балл**.

Ошибочный пример, отсутствие примера – **0 баллов**.

2. На рисунке изображены две окружности с общим центром и равносторонний треугольник ABC. Найдите отношение радиусов окружностей.

Ответ. $\sqrt{\frac{7}{3}}$.



Решение. Обозначим центр окружности *O*, точку касания малой окружности и стороны *AC* – *H*. По рисунку точка *O* – середина высоты *BH*. Если сторона треугольника равна 2*a*, то высота равна $a\sqrt{3}$ (тогда радиус меньшей окружности $\frac{a\sqrt{3}}{2}$). Треугольник *OHC* – прямоугольный, его гипотенуза OC является радиусом большей окружности. По теореме Пифагора $OC=a\frac{\sqrt{7}}{2}$. Таким образом, отношение большего радиуса к меньшему равно $\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Критерии. Верное решение – **7 баллов**.

Замечено, что радиус меньшей окружности – половина высоты треугольника, но дальнейших продвижений нет – **1 балл**.

Правильно получено соотношение между стороной треугольника и радиусом любой из окружностей – **2 балла**.

Решение верное, но содержит арифметическую ошибку, не повлиявшую на ход решения– **6 баллов**.

Получено отношение высоты к стороне равностороннего треугольника, но не сказано, какое отношение этот факт имеет к окружностям – **0 баллов** (это общеизвестный факт).

3. Существуют ли положительные числа *a, b, c, d* такие, что числа d и $\sqrt{d}$ являются соответственно корнями уравнений $ax + b = c$ и $\sqrt{a}x + \sqrt{b} = \sqrt{c}$?

Ответ: Нет, не существуют.

Решение: Докажем, это. Предположим, что такие числа все-таки нашлись.

Из первого равенства следует $ad = c - b$, из второго: $\sqrt{a}\sqrt{d} = \sqrt{ad} = \sqrt{c} - \sqrt{b}$.

Возведем второе равенство в квадрат, приравняем *ad* из этих двух равенств. $\left(\sqrt{c} - \sqrt{b}\right)^2 = ad = c - b = \left(\sqrt{c} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c} + \sqrt{b}\right)$.

Если $c=b$, то $ad=0$, чего не может быть, если a и d положительные. Поэтому $c\neq b$, тогда разделим обе части равенства на число $\left(\sqrt{c} - \sqrt{b}\right) \neq 0$, получим
$\left(\sqrt{c} - \sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{c} + \sqrt{b}\right)$, откуда число $b=0$, что противоречит его положительности.

Критерии. Верное решение – **7 баллов**.

Без обоснования происходит деление на $\left(\sqrt{c} - \sqrt{b}\right)$ (или аналогичное при другом ходе решения), все остальное верно – **5 баллов**.

4. В футбольном турнире участвовало 12 команд. До сентября они сыграли несколько игр, причём не встречались друг с другом более одного раза. Известно, что первая команда сыграла ровно в 11 играх. Есть три команды, которые сыграли по 9 игр. Есть одна команда, сыгравшая 5 игр. Четыре команды – по четыре игры. Еще две команды сыграли всего по одной игре. А

вот про двенадцатую команду информация потерялась. Сколько игр сыграла 12-я команда?

Ответ: 5 игр.

Решение. Пусть первая команда К1 сыграла 11 игр – т.е. со всеми по разу. Команды К2 и К3 сыграли по 1 игре – это игры с командой К1.

Осталось 9 команд (К4-К12). Из них три команды (К4, К5, К6) сыграли по 9 игр. Одна из этих игр с К1. И 8 со всеми командами К4-К12 (кроме самой себя).

Команды К7, К8, К9, К10 сыграли по 4 игры. На данный момент очевидно, что это игры с командами К1, К4, К5, К6. (И других игр у этих команд не было)

Команда К11 сыграла 5 игр. 4 из них – это игры с К1, К4, К5, К6. И точно известно, что с командами К2, К3, К7, К8, К9, К10 она не играла. Таким образом, она сыграла пятую игру с командой К12.

Итого, команда К12 сыграла 5 игр (с К1, К4-6, К11) (и не играла с К2, К3, К7-К10).

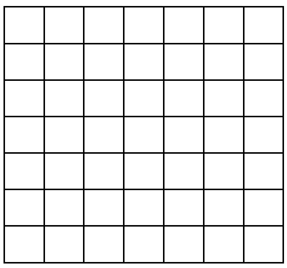
Критерии. Верное решение – **7 баллов**.

Полностью правильно расписано, кто с кем играл, но нет ответа на вопрос задачи (или он почему-либо неверный) – **6 баллов**.

Замечено, что команда, сыгравшая 11 игр, играла со всеми (без дальнейших продвижений) – 0 баллов. Если при этом отмечено, что две команды сыграли только с ней – **1 балл**.

Школьник может использовать графы для своего решения без объяснения используемых терминов.

5. Можно ли во все клетки таблицы 7×7 расставить числа так, чтобы у каждого числа сумма всех его соседей (по стороне) была равна 1?



Ответ: Нет, нельзя.

Решение. Смотрим на левый верхний угол. В клетках «1» сумма чисел равна 1. Далее спускаемся по диагонали. В клетках «2» сумма чисел равна, таким образом, 0 (вместе с клетками «1» они образуют всех соседей второй клетки по диагонали). В клетках «3» сумма должна быть 1, в клетках «4» – 0. В клетках «5» снова 1, в клетках «6» ноль. Но это противоречит тому, что у клетки в правом нижнем углу сумма соседей 1.

Критерии. Полностью верное решение (возможно, не такое, как предложенное) – **7 баллов**. Только верный ответ – **0 баллов**.

6. Дан выпуклый четырехугольник ABCD. Отмечена точка M – середина стороны BC и точка N – середина стороны CD. Отрезки AM, AN и MN разделили четырехугольник на четыре треугольника, площади которых, записанные в некотором порядке, являются последовательными натуральными числами. Какую наибольшую возможную площадь может иметь треугольник ABD?

Ответ. 6.

Решение. Оценка. Пусть $n, n+1, n+2, n+3$ – площади четырех треугольников. Тогда площадь четырехугольника $ABCD$ равна $4n+6$. MN – средняя линия треугольника BCD, поэтому $S_{BCD} = 4S_{MCN}$, но $S_{MCN} \geq n$, значит $S_{BCD} \geq 4n$. Тогда $S_{ABD} = S_{ABCD} - S_{BCD} \leq 6$.

Пример. Если $ABCD$ – это равнобедренная трапеция с основаниями BC=4 и AD=6 и высотой 2, то $S_{ABD} = 6$. Площади треугольников CMN, ABM, AND и AMN равны 1, 2, 3 и 4 соответственно, т.е. являются последовательными натуральными числами.

Критерии. Полностью верное решение – **7 баллов**.

Верное решение, но в примере не показано, почему он подходящий (не обосновано, что площади четырех указанных в условии треугольников являются последовательными натуральными числами) – **5 баллов**.

Доказано, что площадь не превосходит 6, но нет примера, когда площадь равна 6 (или он неправильный)– **4 балла**.

Получен пример, когда площадь треугольника ABD равна 6 (с обоснованием и подтверждением вычислений), но нет объяснения, почему больше 6 она быть не может – **3 балла**.

Пример правильный, но без обоснования, что он подходит под условия задачи (что площади нужных треугольников – 4 последовательных числа) – **1 балл**.