9 класс

1. Уравнение $x^2 - ax + 2022 = 0$ имеет 2 целых положительных корня. При каком наименьшем значении a такое возможно?

   Решение. По теореме, обратной теореме Виета, имеем: $x_1 + x_2 = a$, $x_1 \cdot x_2 = 2022$. Заметим, что произведение корней раскладывается на два множителя 4-мя способами: $1 \cdot 2022$, $2 \cdot 1011$, $3 \cdot 674$, $6 \cdot 337$. Наименьшая сумма множителей равна 6+337=343. **Ответ:** 343.

2. Есть 25 монет, среди которых 12 фальшивых, отличающихся по весу ровно на 1 г от настоящих. Все монеты весят целое число граммов. При этом какие-то могут быть легче настоящих, а какие-то – тяжелее. Есть чашечные весы без гирь со стрелкой, которая показывает разность в весе. Какое минимальное число взвешиваний нужно совершить, чтобы определить фальшивая или нет данная монета?

   Решение. Докажем, что одного взвешивания достаточно. Отложим в сторону исследуемую монету, а остальные положим на чашки весов по 12 монет на каждую. Если весы показали разность в четное число граммов, то монета – настоящая, если в нечетное, то фальшивая. Действительно, если на чашке лежит нечетное число фальшивых монет, то ее масса отличается от массы 12 настоящих монет на нечетное число граммов (сумма нечетного числа нечетных чисел), иначе – на четное. В зависимости от исследуемой монеты на чашках находятся 11 или 12 фальшивых монет, которые можно разделить на две группы соответственно только с разной или только с одинаковой четностью числа монет. **Ответ:** одно взвешивание.

3. Числа p, q и $pq + 1$ – простые. Докажите, что $(2p + q)(p + 2q)$ кратно четырём.

   Решение. Так как $pq+1$ – наибольшее из трех данных простых чисел, то оно нечётное, а значит произведение pq – чётное. Поэтому хотя бы одно из чисел p, q равно 2. Пусть для определенности $p = 2$, тогда $p+2q = 2(1+q)$ делится на 4, если $q > p$, так как $1 + q$ – чётно. Если же $q = p = 2$, то выражение равно 36 – также делится на 4.

4. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если высота, проведенная к ней, равна 1 см, а один из углов треугольника равен 15°. Если ответ не является целым, то округлите его до десятых.

   Решение. Назовем исходный треугольник ABC. Пусть CH - высота, проведенная к гипотенузе; $\angle C = 90°$, а $\angle A = 15°$. Проведем медиану CM. Ясно, что $CM = MA = MB$, а значит треугольник CMA - равнобедренный ($CM = MA$ и $\angle MCA = \angle MAC = 15^\circ$). Заметим, что $\angle BMC = 30^\circ$ (внешний угол треугольника), но тогда $CM = 2 \cdot CH = 2$. Поскольку $CM = MA = MB = 2$, то гипотенуза $AB = 4$.

5. Сколько существует чётных шестизначных чисел, в записи которых одинаковые цифры не стоят рядом?

   Решение. Обозначим через N_k ($k > 1$) – количество чётных k-значных чисел, в записи которых одинаковые цифры не стоят рядом. Аналогично определим N_1, но исключим число 0, поэтому $N_1 = 4$. Непосредственно посчитаем $N_2 = 41$. Пусть $k > 2$. Заметим, что из удовлетворяющих условию k-значных чисел можно сделать подходящие $(k+1)$-значные, приписав слева одну из допустимых 8 цифр (не ноль и не та, что в старшем разряде). Кроме этого, $(k+1)$-значные числа можно образовать из $(k-1)$-значных, приписав слева одну из 9 ненулевых цифр и ноль. И других вариантов нет. Отсюда получаем рекуррентное соотношение: $N_{k+1} = 8 \cdot N_k + 9 \cdot N_{k-1}$. Последовательно вычисляя значения по этой формуле, находим ответ: $N_6 = 265721$.

   Замечание. Также можно построить доказательство на идее, что чётных и нечётных чисел среди тех, в записи которых одинаковые цифры не стоят рядом, примерно поровну (например, соответствие строится заменой цифр по правилу $d \to 9 - d$). Именно, можно доказать, что при нечётном количестве знаков чётных чисел на единицу больше, чем нечётных, а при нечётном – наоборот. Но этот факт также требует аккуратного доказательства.