9 класс

1. Можно ли найти пять различных натуральных числа, каждое из которых не делится ни на 3, ни на 4, ни на 5, но сумма любых трёх делится на 3, сумма любых четырёх делится на 4, а сумма всех пяти делится на 5?

Ответ: *можно, например,* 1, 61, 121, 181 *и* 241.

Решение. Указанные пять чисел можно записать в виде $60k+1$, где k принимает значения 0, 1, 2, 3, 4, поэтому сумма любых трёх чисел

$$(60k_1+1)+(60k_2+1)+(60k_3+1)=60(k_1+k_2+k_3)+3$$

делится на 3. Аналогично доказывается, что суммы любых четырёх и сумма всех пяти чисел делятся на 4 и на 5 соответственно.

Замечание. Можно доказать, что все числа имеют равные остатки при делении на 12.

Критерии. Любой верный пример — 7 баллов. Отмечено, что числа имеют равные остатки при делении на 3 или на 4, однако приведён ошибочный пример — 2 балла.

2. Известно, что $2x+y^2+z^2 \leqslant 2$. Докажите, что $x+y+z \leqslant 2$.

Решение. По условию $2x \leqslant 2-y^2-z^2$, и значит, $2x+2y+2z \leqslant 2-(y^2-2y)-(z^2-2z)$. Выделяя полные квадраты, получим

$$2x+2y+2z \leqslant 4-(y-1)^2-(z-1)^2 \leqslant 4.$$

Таким образом, $2x+2y+2z \leqslant 4 \iff x+y+z \leqslant 2$. Знак равенства только при $y=z=1$ и $x \leqslant 0$.

Критерии. Доказано неравенство $2x+2y+2z \leqslant 4-(y-1)^2-(z-1)^2$ или аналогичное ему — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что суммы цифр каждого из чисел n и $n+1$ делятся на 17.

Ответ: 8899.

Решение. Если n оканчивается не на 9, то суммы цифр чисел n и $n+1$ отличаются на 1 и не могут делиться на 17 одновременно. Пусть $n=\overline{m99\ldots9}$, где в конце стоит k девяток, а число m имеет сумму цифр s и *не оканчивается* на 9. Тогда сумма цифр числа n равна $s+9k$, а сумма цифр числа $n+1$, очевидно, равна $s+1$. По условию эти две суммы делятся на 17, в частности, число $s+1$ кратно 17 $\Longrightarrow s \geqslant 16$. Наименьшее число m, которое не оканчивается на 9 и у которого сумма цифр 16, равно 88.

Далее, на 17 делится число $s+9k=(s+1)+(9k-1)$. Поскольку первое слагаемое делится на 17, число $9k-1$ тоже кратно 17. Наименьшее значение k, удовлетворяющее этому условию, равно 2, то есть $n=8899$. Суммы цифр каждого из чисел n и $n+1$ делятся на 17.

Критерии. Доказано, что искомое число оканчивается цифрой 9 — 1 балл. Верный ответ — 2 балла. Доказано, что сумма цифр, отличных от 9, не меньше 16 — ещё 2 балла. Доказано. что девяток ровно две — ещё 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

4. За круглым столом сидят 30 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждого спросили: «Сколько рыцарей среди ваших соседей?» (Двое сидящих называются *соседями* друг друга, если между ними нет других сидящих.) 10 человек ответили «один», 10 — «два» и 10 — «ни одного». Каким наибольшим может быть число рыцарей за столом?

Ответ: 22 *рыцаря.*

Решение. Из условия задачи следует, что число рыцарей, имеющих по два соседа-рыцаря, не превосходит 10; то же самое можно сказать и про число рыцарей, имеющих по одному соседу-рыцарю. Поэтому число пар рыцарей-соседей друг друга не превосходит $(2 \cdot 10 + 1 \cdot 10) : 2 = 15$. А поскольку всего за столом имеется 30 пар соседей, то по меньшей мере в $30 - 15 = 15$ парах есть люди, рыцарями не являющиеся; число таких людей не меньше, чем $\left[\frac{15}{2}\right] + 1 = 8$.

Приведём пример, показывающий, что за столом может быть в точности $30 - 8 = 22$ рыцаря. Пусть сидящие пронумерованы числами от 1 до 30 по часовой стрелке, а рыцарями являются все те, чьи номера отличны от 1, 3, 5, 7, 11, 15, 19 и 23. Тогда все необходимые условия будут выполнены, если № 1 ответит «два», а № 3, 5, 7, 11, 15, 19 и 23 — «ни одного».

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что число рыцарей не более 22 (*оценка*) — 3 балла. Приведён пример с 22 рыцарями — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. В треугольнике ABC точка O_1 — центр вписанной окружности. На продолжении стороны AB за точку B выбрана точка D. Окружность с центром O_2 касается отрезка CD и продолжений сторон AB и AC треугольника ABC. Докажите, что если $O_1C = O_2C$, то треугольник BCD — равнобедренный.

Решение. (Рис. 2.) Угол CO_1O_2 — внешний для треугольника ACO_1, поэтому

$$\angle CO_1O_2 = \angle CAO_1 + \angle ACO_1 = \frac{1}{2}\angle CAB + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) = \frac{1}{2}\angle CBD.$$

Далее, пусть E — некоторая точка на продолжении отрезка AC за точку C. Угол ECO_2 — внешний для треугольника ACO_2. Отсюда $\angle CO_2O_1 = \angle ECO_2 - \angle CAO_2 = \frac{1}{2}\angle ECD - \frac{1}{2}\angle CAD = \frac{1}{2}\angle CDA$.

Таким образом, из равенства $O_1C = O_2C$ следует равенство углов CO_1O_2 и CO_2O_1, а значит, и углов CBD и CDB. Отсюда следует, что треугольник BCD — равнобедренный.

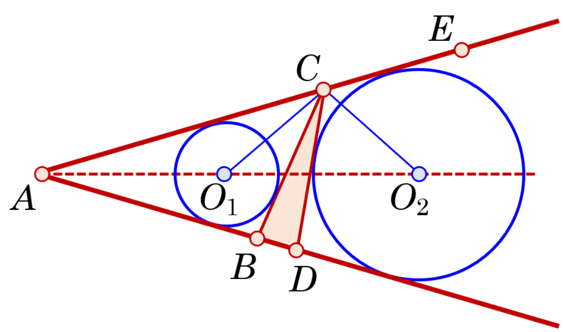

Рис. 2

Критерии. Доказано, что угол CO_1O_2 равен $\frac{1}{2}\angle CBD$ — 3 балла. Доказано, что угол CO_2O_1 равен $\frac{1}{2}\angle CDA$ — ещё 3 балла. Полное решение — 7 баллов.