# Ключи к заданиям муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников 2022/23 учебного года по математике

**Условия и решения задач**

**9.1.** Четырёхзначное число $n$ удвоили и прибавили к результату 1000. В результате получили четырёхзначное число, записанное теми же цифрами, что и $n$, только в обратном порядке. Найдите все возможные значения $n$.

*Ответ.* 2996.

*Решение.* Пусть $a, b, c, d$ – число тысяч, сотен, десятков и единиц в числе $n$ соответственно. Запишем условие в виде:

$$\begin{array}{ccccc} & a & b & c & d \\ & a & b & c & d \\ + & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & d & c & b & a \end{array}$$

Так как $a$ – последняя цифра $2d$, то $a$ – чётная. Так как $2a + 1 \leq d \leq 9$, то $a \leq 4$. Таким образом, либо $a = 2$, либо $a = 4$.

Если $a = 4$, то из $2a + 1 \leq d \leq 9$ следует, что $d = 9$. Но тогда последняя цифра числа $2d$ равна 8, но $a \neq 8$. Противоречие.

Если $a = 2$, то из $2a + 1 \leq d$ следует, что $d \geq 5$. И, так как, последняя цифра $2d$ – это 2, то $d = 6$.

Таким образом уравнение сводится к виду:

$$\begin{array}{cccc} & & b & c \\ & & b & c \\ + & & & 1 \\ \hline & 1 & c & b \end{array}$$

Здесь либо $2c + 1 = b$ и $2b = 10 + c$, либо $2c + 1 = 10 + b$ и $2b + 1 = 10 + c$. В первом случае система не имеет целых решений, во втором получим $b = c = 9$.

**9.2.** В корзине лежат апельсины и бананы. Если добавить туда столько же апельсинов, сколько сейчас там бананов (в штуках), то процент апельсинов будет вдвое больше, чем получится, если добавить в корзину столько бананов, сколько сейчас там апельсинов. Какой процент апельсинов сейчас в корзине?

*Ответ.* 50.

*Решение.* Пусть $a$ – количество апельсинов, а $b$ – количество бананов в корзине. Если добавить столько же апельсинов, сколько сейчас там бананов, то будет $a+b$ апельсинов из $a+2b$ фруктов, и доля апельсинов будет$(a+b)/(a+2b)$. Если добавить столько же бананов, сколько сейчас апельсинов, то будет $a$ – апельсинов среди $2a+b$ фруктов, и доля апельсинов будет $a/(2a+b)$. По условию задачи имеем $(a+b)/(a+2b)=2a/(2a+b)$. Откуда $b^2=ab$. Так как бананов в корзине больше нуля, то $b=a,$ то есть бананов и апельсинов в корзине поровну.

**9.3.** Найдите значение выражения $x-\sqrt{2022x}+2023$,

если $x-\sqrt{\frac{2022}{x}}=2023$.

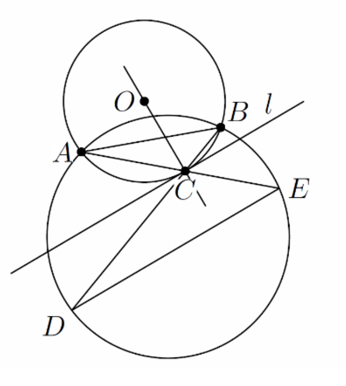
*Ответ.* 2024.

*Решение.* Преобразуем условие $x-\sqrt{\frac{2022}{x}}=2023$ исходя из того, что $x>0$. Получим: $x^2-\sqrt{2022x}=2023x$; $x^2-2022x-x-\sqrt{2022x}=0$;

$\left(x-\sqrt{2022x}\right)\left(x+\sqrt{2022x}\right)-\left(x+\sqrt{2022x}\right)$; $\left(x-\sqrt{2022x}-1\right)\left(x+\sqrt{2022x}\right)=0$.

Второй множитель положителен при всех $x>0$, из чего следует, что $x-\sqrt{2022x}-1=0$, откуда $x-\sqrt{2022x}+2023=2024$.

**9.4.** Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$. На дуге $AB$ одной окружности, лежащей внутри второй, взята точка $C$. Точки пересечения $AC$ и $BC$ со второй окружностью, отличные от $A$ и $B$, обозначим $E$ и $D$ соответственно. Докажите, что прямые $DE$ и $OC$ перпендикулярны.




*Решение.* Проведем касательную к первой окружности в точке $C$, обозначим ее $l$. Угол между $l$ и $AE$

равен углу $ABC$ (как угол между касательной и хордой), а угол $ABC$ равен углу $AED$ (опираются на одну дугу). Значит, $l||DE$, и $OC \perp DE$.

**9.5.** На соревнованиях выступление спортсмена оценивают 7 судей, каждый из которых выставляет оценку в баллах (целое число от 0 до 10). Для получения итоговой оценки лучшая и худшая из оценок экспертов отбрасываются, и подсчитывается среднее арифметическое. Если бы средняя оценка подсчитывалась по всем семи оценкам, то спортсмены расположились бы строго в обратном порядке. Какое наибольшее количество спортсменов могло участвовать в соревновании?

*Ответ.* 5.

*Решение.* Допустим, что танцоров не меньше шести. Пусть $A$, $a$, $S_A$ — соответственно лучшая оценка, худшая оценка и сумма всех неотброшенных оценок у победителя, а $B$, $b$, $S_B$ — то же у последнего спортсмена. Вместо средних можно расставлять танцоров по сумме всех баллов или сумме всех, кроме крайних. Из условия следует, что такие суммы у всех различны и идут в противоположном порядке. Так как суммы целые, а танцоров не менее шести, должны выполняться неравенства

$$S_A - S_B \geq 5 \text{ и } (B + b + S_B) - (A + a + S_A) \geq 5.$$

Складывая эти неравенства, получим $B + b - A - a \geq 10$.

Отсюда $b \geq A + a + (10 - B) \geq A$, т. е. худшая оценка последнего не меньше лучшей оценки победителя. Но тогда у последнего каждая оценка не меньше, чем у победителя, т. е. $S_B \geq S_A$. Получили противоречие.

Пример выставления оценок спортсменам: 0-0-0-0-0-0-10, 0-0-0-0-0-1-8, 0-0-0-0-1-1-6, 0-0-0-1-1-1-4, 0-0-1-1-1-1-2.

*Комментарий.* пример – 3 балла, оценка – 4 балла.