

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

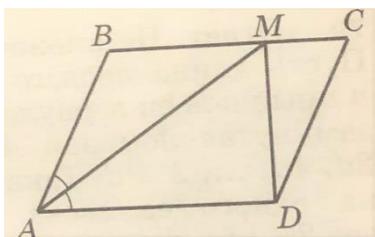
Муниципальный этап. Ответы и решения.

9 класс.

9.1. Решение. $5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2022} = 5(1 + 5) + 5^3(1 + 5) + \dots + 5^{2021}(1 + 5) = 6(5 + 5^3 + \dots + 5^{2021})$. Так как первый множитель делится на 6, то и все произведение делится на 6.

9.2. Ответ. $\angle A = 60^\circ, \angle B = 120^\circ$.

Решение. Пусть $\angle DAM = \angle BAM = \alpha$,



тогда $\angle AMB = \alpha$ ($BC \parallel AD$), $\angle AMC = 180^\circ - \alpha$, поэтому

$\angle CMD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Отсюда $\angle MDA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, значит, $\angle MDC = \angle CDA - \angle MDA = (180^\circ - 2\alpha) - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 90^\circ - \frac{3\alpha}{2}$. Итак, $90^\circ - \frac{3\alpha}{2} = 45^\circ$, откуда $\alpha = 30^\circ$.

9.3. Ответ. Не могло.

Решение. Пусть A – сумма чисел в первой строке, B – сумма чисел в первом столбце, S – сумма всех чисел в таблице. Если таблица удовлетворяет условию задачи, то

$$S = A + (A + 2) + (A + 4) + (A + 6) = 4A + 12 = 4(A + 3) \text{ и}$$

$$S = B + (B + 3) + (B + 6) + (B + 9) = 4B + 18 = 4(B + 4) + 2.$$

Первое число делится на 4, второе нет.

9.4. Решение. Так как $ax^2 + 2bx + c < 0$ при всех x , то по свойствам квадратичной функции: $\begin{cases} a < 0, \\ 4b^2 - 4ac < 0. \end{cases}$

Из этой системы следует, что $c < 0$. Трехчлен $a^2x^2 + 2b^2x + c^2$ принимает при всех x положительные значения, если выполняются условия: $\begin{cases} a^2 > 0, \\ 4b^4 - 4a^2c^2 < 0. \end{cases}$

Первое неравенство очевидно. Преобразуем левую часть второго неравенства: $4b^4 - 4a^2c^2 = 4(b^2 - ac)(b^2 + ac)$. Так как $b^2 - ac < 0, b^2 + ac > 0$, то их произведение отрицательно. Таким образом, значения $a^2x^2 + 2b^2x + c^2$ при всех x положительны.

9.5. Ответ. 25%.

Решение. Пусть M – акционер, владеющий наибольшим процентом акций – x процентами акций. Разобьем остальных 99 акционеров на три группы A, B и C по 33 акционера. Пусть они владеют соответственно a, b и c процентами акций. Тогда $2(100 - x) = 2(a + b + c) = (a + b) + (b + c) + (c + a) \geq 50 + 50 + 50$, т.е. $x \leq 25$.

Если каждый из 99 акционеров, кроме M , владеет $\frac{75}{99} = \frac{25}{33}\%$ акций, то любые 66 из них владеют ровно 50%, а у M ровно 25% акций.